

Vektoriai plokštumoje

Iš atnaujintos programos:

31.3. Geometrija ir matavimai.

31.3.1. Konstravimas. Transformacijos. Apibrėžiama vektoriaus (kryptinės atkarpos) sąvoka. Mokomasi atpažinti lygius, priešinguosius vektorius, rasti vektorių sumą, skirtumą, padauginti vektorių iš skaičiaus. Šie apibrėžimai taikomi, sprendžiant paprastus geometrinius uždavinius (plačiau vektoriaus sąvoka taikoma fizikos pamokose). (Planuojama 4 val. iš 70% turinio) <...> **Į 8-os klasės kursą įtraukta pažintis su vektoriumi.** Tai padaryta siekiant gilesnės integracijos su fizika. Matematikos pamokose bus apibrėžta vektoriaus, lygių, priešingų vektorių sąvokos, mokiniai išmoks rasti vektorių sumą, skirtumą, padauginti vektorių iš skaičiaus.<...>

(Pagrindinio ugdymo matematikos bendrosios programos įgyvendinimo rekomendacijos)

Vektoriaus sąvoka

Daugelį fizikinių dydžių, pavyzdžiui jėgą, materialiojo taško poslinkį, greitį, apibūdina ne tik jų skaitinė reikšmė, bet ir kryptis erdvėje.

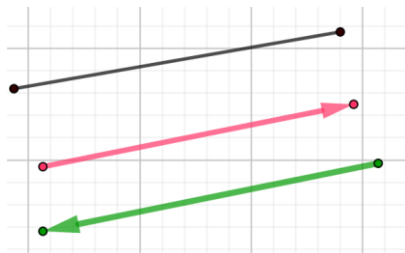
Pavyzdžiui:

1. Futbolininkas bėgo 10 kilometrų per valandą link aikštės krašto (nurodytas futbolininko greitis).
2. Automobilis įsibėgėjo į šiaurę 4 metrų per sekundę kvadratu greičiu (nurodytas automobilio pagreitis).

Kiekviename pavyzdyje yra nurodyta kryptis: futbolininkas bėgo link aikštės krašto, automobilis įsibėgėjo į šiaurę. Tokie dydžiai fizikoje vadinami vektoriniais dydžiais.

Atsiribodami nuo fizikinių vektorių dydžių konkrečių savybių, pereikime prie geometrinės vektoriaus sąvokos.

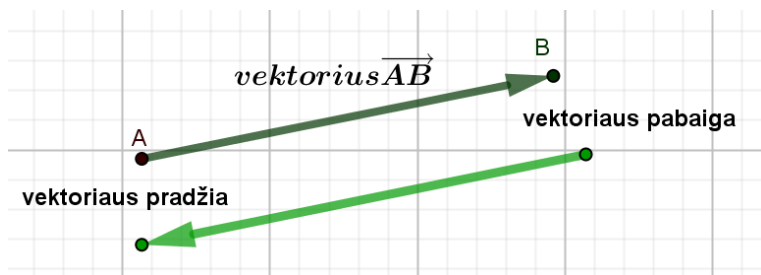
Nagrinėkime bet kokią atkarpą. Galima nurodyti dvi jos kryptis: iš vieno galo ir atvirkščiai



Norėdami pasirinkti vieną kryptį, vieną atkarpos galą vadinsime *pradžia*, kitą – *pabaiga* ir laikysime, kad atkarpa nukreipta iš pradžios į pabaigą.

Apibrėžimas: Atkarpa, kurios nurodyta pradžia ir pabaiga, vadinama kryptine atkarpa arba vektoriumi.

Vektoriai žymimi dviem didžiosiomis raidėmis su rodykle viršuje, pavyzdžiui \vec{AB} , arba viena mažąja raide rodykle virš jos, pavyzdžiui \vec{a} .



Vektoriaus \vec{AB} pradžios taškas yra A, o pabaigos – B. vektoriaus \vec{BA} pradžios taškas yra B, o pabaigos – A. Spindulio AB nusakyta kryptis vadinama vektoriaus \vec{AB} kryptimi.

Kiekvienas plokštumos taškas irgi yra vektorius. Toks vektorius vadinamas nuliniu vektoriumi ir žymimas $\vec{0}$ arba dviem vienodomis didžiosiomis raidėmis su rodykle viršuje. Nulinio vektoriaus pradžia sutampa su pabaiga.



Nenulinio vektoriaus \vec{AB} ilgiu (moduliu), vadinamas atkarpos AB ilgis. Vektoriaus \vec{AB} arba \vec{a} ilgis žymimas $|\vec{AB}|$ arba $|\vec{a}|$.

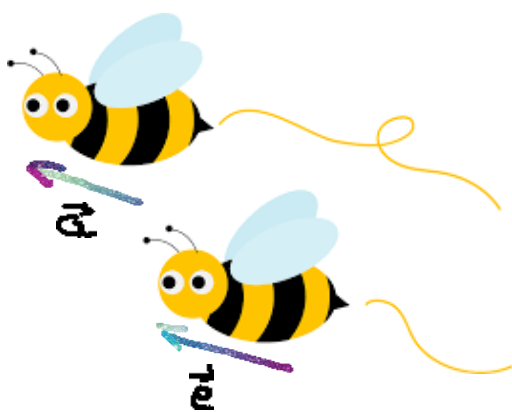
Nulinio vektoriaus ilgis lygus nuliui $|\vec{MM}| = |\vec{0}| = 0$.

Pavyzdžiui:



Atkarpos AB ilgis 3cm, tai ir vektoriaus \vec{AB} ilgis 3cm, rašome $|\vec{AB}| = 3\text{cm}$.

Lygūs vektoriai. Priešingieji vektoriai

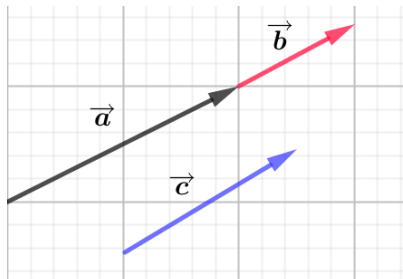


Paveiksle matomos dvi tokio pat dydžio bitutės, kurios skrenda ta pačia kryptimi, ir trys skirtingo dydžio bitutės, kurios skrenda ta pačia kryptimi.

Pirmuoju atveju vektoriai, nusakantys bitučių kryptį ir ilgį laikomi lygiais vektoriais, o antruoju- tik vienakrypčiais vektoriais.

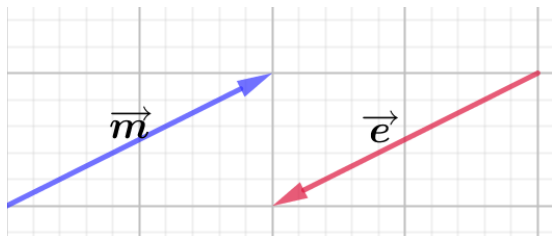
Išvada: Vektoriai, kurių ilgiai lygūs ir kryptys sutampa, vadinami **lygiais vektoriais**.

Vektoriai, kurių kryptys vienodos, vadinami **vienakrypčiais vektoriais**.



Vektoriai \vec{a} , \vec{b} ir \vec{c} yra **vienakrypčiai vektoriai**. Žymime $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ ir $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$.

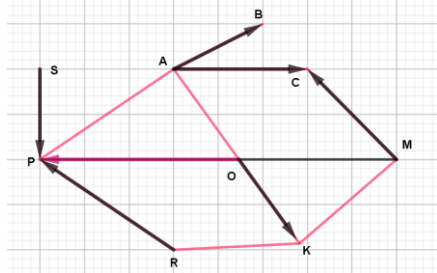
Vektoriai, kurių ilgiai lygūs, bet kryptys priešingos, vadinami **priešingais vektoriais**.



Vektoriai \vec{m} ir \vec{e} yra **priešingieji vektoriai**. Žymime $\vec{m} = -\vec{e} = -\vec{m}$.

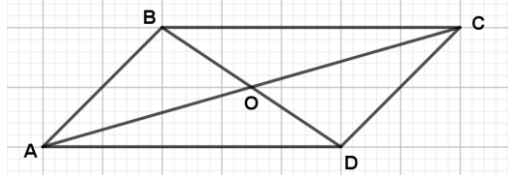
UŽDUOTYS

1. Surašykite visus brėžinyje pavaizduotus vektorius.



2. Lygiagretainio ABCD gretimų kraštinių ilgiai 6 cm ir 8 cm. Lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas O. Atkarpų AO ir BD ilgiai atitinkamai lygūs 7 cm ir 12 cm.

- vektorius \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{OC} ir \overrightarrow{DO} pažymėkite brėžinyje;
- apskaičiuokite vektorių \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{OC} ir \overrightarrow{DO} ilgius.



3. Nubraižykite stačiakampį ABCD. Stačiakampio įstrižainių susikirtimo tašką pažymėkite M. Išsiaiškinkite ar lygūs vektoriai? Atsakymą pagrįskite:

- \overrightarrow{AD} ir \overrightarrow{DC} ;
- \overrightarrow{BC} ir \overrightarrow{DA} ;
- \overrightarrow{AM} ir \overrightarrow{MC} ;

d) \overrightarrow{AC} ir \overrightarrow{DB} ?

4. KLMNAB – taisyklingasis šešiakampis.

Surašykite brėžinyje pavaizduotus

a) priešingųjų vektorių poras; b) vienakrypčių vektorių poras.

5. Perskaitykite teiginį. Ar teisingas teiginys? Atsakymą pagrįskite.

a) jei $\vec{a} = \vec{b}$, tai $|\vec{a}| = |\vec{b}|$;

b) jei $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ir $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, tai $\vec{a} = \vec{b}$;

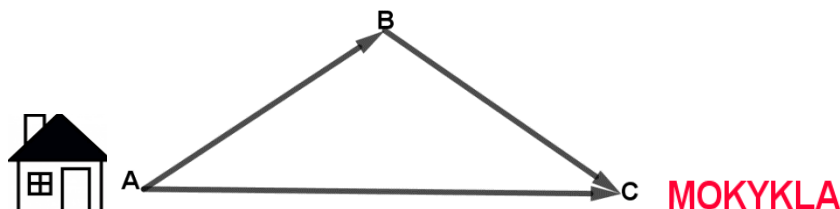
c) jei $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, tai $|\vec{a}| = |\vec{b}|$?

Vektorių suma

Išnagrinėkime pavyzdį.
užsuka pas draugą, kuris
mokyklą. Pavaizduokime tai brėžiniu.



Kazys, kuris gyvena name A, eidamas į mokyklą, pakeliui gyvena name B, ir tuomet kartu berniukai toliau eina į

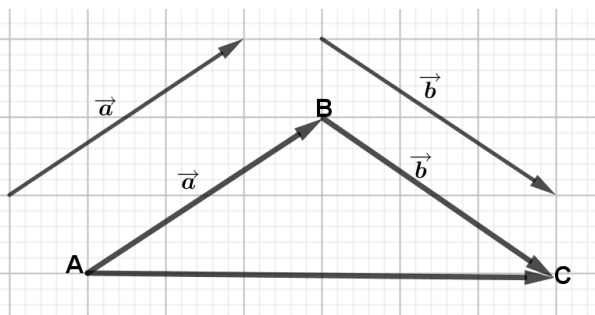


Galima teigti, kad Kazys pasislinko iš taško A į tašką B, po to iš taško B į tašką C. Atlikus tuos du poslinkius, kuriuos galime pavaizduoti vektoriais \overrightarrow{AB} ir \overrightarrow{BC} , galutiniame rezultate Kazys atėjo į mokyklą, tai yra pasislinko iš taško A į tašką C. Tą galutinį poslinkį galima užrašyti vektoriumi \overrightarrow{AC} .

Galutiniame rezultate gautą vektorių \overrightarrow{AC} galime vadinti vektorių \overrightarrow{AB} ir \overrightarrow{BC} suma:

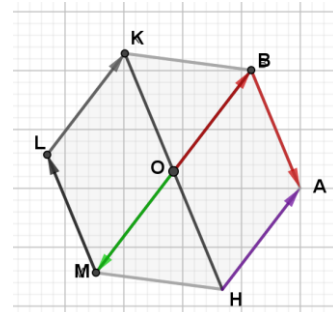
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Apibrėžimas. Sakykime, \vec{a} ir \vec{b} – du vektoriai. Pažymėkime bet kurį tašką A ir nuo to taško atidėkime vektorių \overrightarrow{AB} , lygų vektoriui \vec{a} . Po to nuo taško B atidėkime vektorių \overrightarrow{BC} , lygų vektoriui \vec{b} . Vektorius \overrightarrow{AC} vadinamas vektorių \vec{a} ir \vec{b} suma.



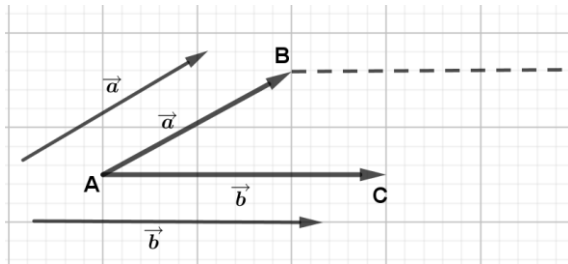
Tokia vektorių sudėties taisyklė vadinama **trikampio taisykle**.

Aptarkime dar vieną vektorių sudėties taisyklę. Sakykime, \vec{a} ir \vec{b} – du vektoriai. Pažymėkime bet kurį tašką A ir nuo to taško

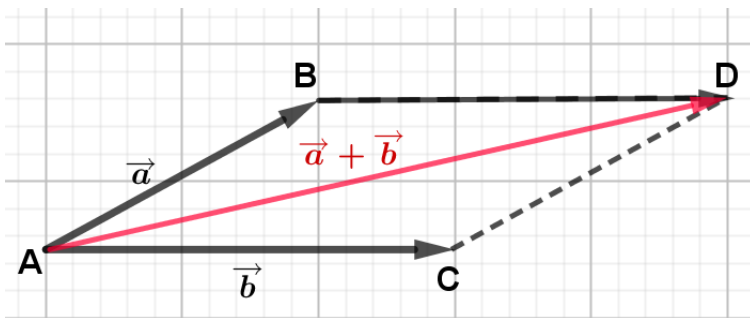


\vec{b} – du

atidėkime vektorių \overrightarrow{AB} , lygų vektoriui \vec{a} ir vektorių \overrightarrow{AC} , lygų vektoriui \vec{b} .



Iš taško B braižome tiesę lygiagrečią vektoriui \overrightarrow{AC} . Nubraižytoje tiesėje atidedame vektorių \overrightarrow{BD} , lygų vektoriui \overrightarrow{AC} ($\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$). Nubraižome lygiagretinį ABDC.



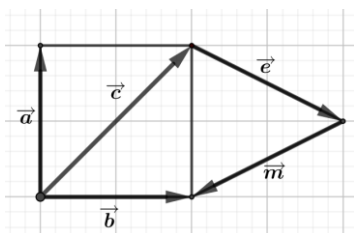
Tada vektorių \overrightarrow{AD} lygus vektorių \vec{a} ir \vec{b} sumai: \overrightarrow{AD}

$$= \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}. \text{ Ši vektorių}$$

sudėties taisyklė vadinama lygiagretinio taisykle. Lygiagretinio taisyklė dažnai naudojama fizikoje, pavyzdžiui, sudedant dvi jėgas.

UŽDUOTIS:

1. Nustatykite, kurie vektoriai yra kitų dviejų vektorių suma?



2. Nubraižykite stačiakampį KMOP. Jame pažymėkite vektorius: \overrightarrow{KM} , \overrightarrow{MP} , \overrightarrow{KP} ir \overrightarrow{KO} . Šiais vektoriais užrašykite vektorių sudėties trikampio taisyklę ir vektorių sudėties lygiagretinio taisyklę.

Vektorių atimtis

Išnagrinėkime tą patį pavyzdį apie Kazio ėjimą į mokyklą. Tik dabar jis neužsuka pas draugą, o iš karto eina į mokyklą ir grįžta iš jos.

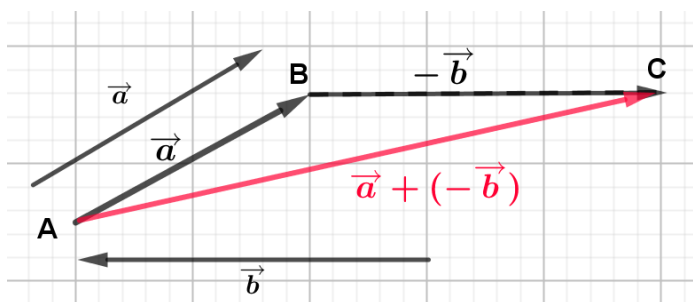


Eidamas į mokyklą Kazys pasislinko iš taško A į tašką B, o grįždamas namo – iš taško C į tašką A. Kazys nueidamas ir grįždamas įveikė tą patį atstumą. Taigi, vektoriai \vec{AC} ir \vec{CA} yra priešingi:

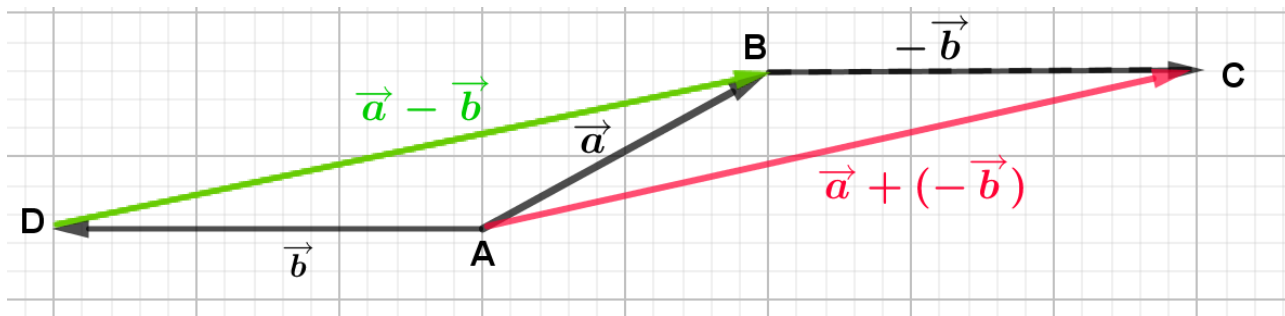
$$\vec{AC} = -\vec{CA}. \text{ Be to galime daryti išvadą, kad } \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{0} \text{ arba } \vec{AC} + (-\vec{AC}) = \vec{0}.$$

Išsiaiškinime, kaip atimami du vektoriai. Sakykime, \vec{a} ir \vec{b} – du vektoriai. Pažymėkime bet kurią tašką A ir nuo to taško atidėkime vektorių \vec{AB} , lygų vektoriui \vec{a} . Po to nuo taško B atidėkime vektorių \vec{BC} , priešingą vektoriui \vec{b} . Vektorius \vec{AC} vadinamas vektorių \vec{a} ir \vec{b} atimties vektoriumi:

$$\vec{AC} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



Dviejų vektorių atimtį galima rasti ir kitaip: nuo taško A atidėkime vektorių \vec{AB} , lygų vektoriui \vec{a} . Po to nuo to pačio taško A atidėkime vektorių \vec{AD} , lygų vektoriui \vec{b} . Sujungiame taškus D ir A. Vektorius \vec{DA} taip pat yra vadinamas vektorių \vec{a} ir \vec{b} atimties vektoriumi (ADBC - lygiagretainis, $AC = DB$, priešingos lygiagretainio kraštinės).

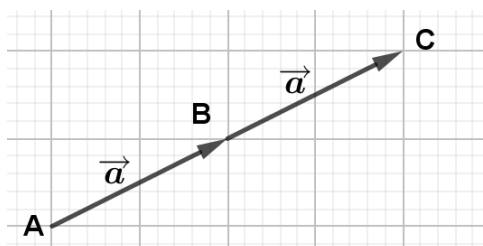


Vektoriaus daugyba iš skaičiaus

Pažymėkime tašką A. Iš šio taško pasislinkime į tašką B. Po to tokiu pat atstumu pasislinkime iš taško B į tašką C. Taigi, galima užrašyti \vec{AB}

$$= \vec{BC}, \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{a} = 2 \cdot \vec{a};$$

$\vec{AC} = 2 \cdot \vec{a}$. Sakome: vektorius \vec{AC} yra lygus vektoriui \vec{a} padaugintam iš skaičiaus lygaus 2. Be to vektoriaus \vec{AC} ilgis yra dviem vektoriaus \vec{a} ilgiams $|\vec{AC}| = 2 \cdot |\vec{a}|$.

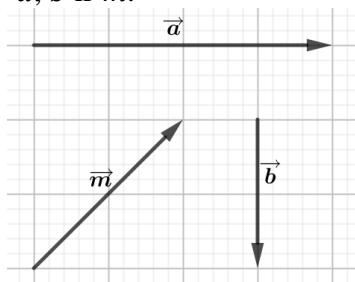


Apibrėžimas. Nenulinio vektoriaus \vec{a} ir skaičiaus k sandauga vadinamas vektorius \vec{b} , kurio ilgis lygus $|k| \cdot |\vec{a}|$. Jeigu k yra teigiamas skaičius, tai vektoriai \vec{a} ir $k\vec{a}$ yra vienakrypčiai, o jeigu k – neigiamas skaičius, tai vektoriai \vec{a} ir $k\vec{a}$ yra priešpriešiniai.

UŽDUOTIS:

1. Nubraižyti trys skirtingi vektoriai:

\vec{a} ; \vec{b} ir \vec{m} .



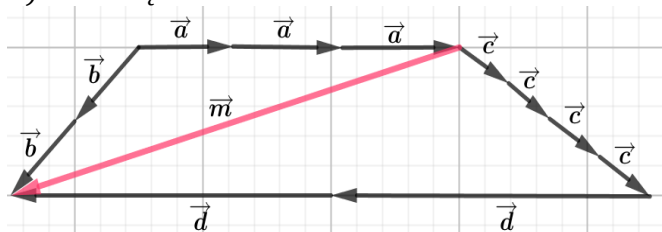
Taikydami vektorių sumos taisyklę, vektorių atimties taisyklę, vektorių daugybos iš skaičiaus taisyklę, nubraižykite vektorius:

- a) $\vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{b} + \vec{a}$; c) $\vec{m} + \vec{b}$;
 d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{m}$; e) $\vec{m} - \vec{b}$; f) $\vec{b} - \vec{a}$; g) $2\vec{m}$; h) $3\vec{b} + 3\vec{m}$.

2. Užrašykite vektorių \vec{m}

a) vektorių suma;

b) vektorių skirtumu.



Literatūra :

1. Atnaujintos BP ir rekomendacijos, Mokykla 2030.
2. Geometrija 7-9, Kaunas „Šviesa“ 1993
3. <https://www.google.com/search?q=bee%20clipart&tbm=isch&hl=lt&client=firefox-b-d&sa=X&ved=0CGEQrNwCKABqFwoTCODCnajTufsCFQAAAAAdAAAAABAD&biw=1115&bih=558>