RUGSĖJO MĖNESIO KONSULTACIJŲ I–II GIMNAZIJOS KLASIŲ MATEMATIKOS MOKYTOJAMS SANTRAUKA. PIRMA DALIS

NŠA
2024-09-24

Turinys

I–II gimnazijos klasių koncentro BP matematikos turinio kaitos ypatybės pagal turinio sritis

SKAIČIAI IR SKAIČIAVIMAI

Ši sritis į pagrindinio ugdymo antros pakopos bendrąją programą neįtraukta.

MODELIAI IR SĄRYŠIAI

9 (I gimnazijos) klasėje numatoma nagrinėti skaičių sekas. Skaičių seka bus apibrėžta kaip funkcija, kurios apibrėžimo sritis yra $\mathbb{N}$. Mokoma skaičių sekas užrašyti n-tojo nario formule, rekurentiniu būdu.

10 (II gimnazijos) klasėje nenumatyta plėtoti dėsningumų temos, tačiau numatyta plėtoti problemų sprendimo įgūdžius, nagrinėjant:

- proporcingosios dalybos taikymo situacijas,
- Fibonačio skaičių sekos pasireiškimo aplinkoje situacijas,
- su procentais susijusius uždavinius,
- su dydžių santykiais susijusius uždavinius,
- su finansiniais skaičiavimais susijusias situacijas, pavyzdžiui: „Kaip labiau apsimoka dirbti savarankiškai – pagal verslo liudijimą ar individualią veiklą?“, „Kiek pavyktų sutaupyti pasinaudojant pagrindinėmis mokesčių lengvatomis?“.

Atnaujinamoje programoje lieka nepakitęs ir kursas apie funkcijas – nagrinėjamos tiesinė ir kvadratinė funkcijos (atvirkščiojo proporcingumo funkcija nenagrinėjama), jų grafinės išraiškos, įgytos žinios taikomos sprendžiant lygtis, nelygybes, sistemas.

9 (I gimnazijos) klasėje susipažįstama su kvadratinio trinario, trupmeninio racionaliojo reiškinio sąvokomis, mokoma spręsti kvadratines lygtis, kvadratinį trinarį skaidyti tiesiniais dauginamaisiais, spręsti lygčių sistemas, kuriose viena lygtis yra tiesinė, o kita – kvadratinė.

10 (II gimnazijos) klasėje mokoma prastinti trupmeninius racionaliuosius reiškinius, algebriškai spręsti trupmenines racionaliąsias lygtis, algebriškai ir grafiškai spręsti kvadratines nelygybes, keitimo būdu spręsti lygčių sistemas, kuriose viena lygtis yra tiesinė, o kita – trupmeninė racionalioji.

GEOMETRIJA IR MATAVIMAI

Geometrijos mokymo turinys atnaujintoje programoje pasikeitė iš esmės – planimetrija ir plokštumos figūros baigiama nagrinėti pagrindinėje mokykloje, o stereometrija ir erdviniai kūnai 9–10 (I–II gimnazijos) klasėse nenagrinėjama (ši tematika yra III–IV gimnazijos klasėsų kursas).

9–10 (I–II gimnazijos) klasėse nagrinėjama apskritimo geometrija ir trigonometrijos įvadas (įskaitant sinusų ir kosinusų teoremas, trigonometrines trikampio ir lygiagretainio plotų formules). Abi temos nuosekliai plėtojamos abiejose klasėse.

9 (I gimnazijos) klasėje supažindinama su centrinio ir įbrėžtinio kampų sąvokomis, nagrinėjamos savybės apie į tą patį lanką besiremiančius įbrėžtinius kampus ir į tą patį lanką besiremiančius centrinį ir įbrėžtinį kampus. Aiškinama, kad apskritimo lanko didumą galima apibūdinti dvejopai: nurodant ilgį įprastais ilgio vienetais bei laipsniais. Įvedamos apskritimo (skritulio) liestinės, kirstinės, stygos, skritulio išpjovos ir nuopjovos sąvokos, įrodomos ir, sprendžiant uždavinius, taikomos liestinės, susikertančių liestinių atkarpų, susikertančių stygų savybės.

10 (II gimnazijos) klasėje apibrėžiamos įbrėžtinio bei apibrėžtinio daugiakampio sąvokos, įrodomos ir taikomos į trikampį ar keturkampį įbrėžto ir apibrėžto apskritimo savybės, mokomasi taikyti trikampio plotą

bei trikampio kraštinių ilgius ir įbrėžtinio, apibrėžtinio apskritimo spindulių ilgius siejančias formules: $S = rp = \frac{abc}{4R}$.

Trigonometrijos taikymų geometrijoje tema pradedama nagrinėti 9 (I gimnazijos) klasėje: apibrėžiami trigonometriniai santykiai stačiajame trikampyje – smailiojo kampo sinusas, kosinusas ir tangentas, paaiškinamas šių apibrėžimų prasmingumas (apskaičiuojant panašių trikampių atitinkamų kraštinių ilgių santykius, įsitikinama, kad jų reikšmės nepriklauso nuo trikampio dydžio, o priklauso tik nuo trikampio smailiojo kampo didumo). Įrodoma pagrindinė trigonometrinė tapatybė $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ bei to paties kampo sinusą, kosinusą bei tangentą siejanti formulė $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, mokoma apskaičiuoti 30°, 45°, 60° didumo kampų trigonometrines reikšmes, mokomasi skaičiuotuvu apskaičiuoti apytiksles smailiojo kampo sinuso, kosinuso, tangento reikšmes, sprendžiami matematinio ir realaus konteksto uždaviniai, kuriuose taikomi trigonometriniai sąryšiai (pvz., objekto aukščio nustatymas, kelio nuolydžio ar lėktuvo pakilimo kampo radimas, atstumo iki neprieinamos vietos skaičiavimas ir pan.).

10 (II gimnazijos) klasėje apibrėžiamas vienetinis apskritimas ir posūkio kampas, pateikiama kampų nuo 0° iki 180° sinuso, kosinuso ir tangento samprata. Mokoma apskaičiuoti 120°, 135°, 150° didumo kampų sinuso, kosinuso ir tangento reikšmes. Įsitikinama formulių $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$ teisingumu. Įrodoma trikampio ploto trigonometrinė formulė $S = \frac{1}{2}ab\sin(\alpha)$, sinusų teorema, kosinusų teorema mokoma jas taikyti nežinomų trikampio elementų radimui. Pagrindžiamas sinusų teoremos ir apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgio sąryšis $\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} = 2R$, praktikuojamasi taikyti šias teoremas, sprendžiant su trikampiais susijusius uždavinius.

DUOMENYS IR TIKIMYBĖS

Didžiąja dalimi 9–10 (I–II gimnazijos) klasės statistikos kursas yra naujas. Ankstesnėje programoje buvo numatyta koreliacijos tema, tačiau naujoje programoje ši tema gerokai detalizuota ir kiek praplėsta. Mokiniai bus supažindinti su tiesinės koreliacijos modeliu, bus siekiama suformuoti teisingą jų sampratą apie kintamųjų priklausomybės egzistavimą populiacijoje. 10 (II gimnazijos) klasėje mokiniai nagrinės duomenų išsibarstymo apie imties vidurkį problematiką, susipažins su normaliojo, simetriško/asimetriško skirstinių pasireiškimu mus supančiame pasaulyje. Naujos, bendrą statistinį raštingumą plėtojančios temos atveria galimybes mokiniams įsitraukti į įvairias projektines veiklas, atlikti integruotas su daugeliu mokomųjų dalykų užduotis. Pavyzdžiui, mokiniai gali nagrinėti statistines ataskaitas apie savo, savo mokyklos mokinių, šalies mokinių pasiekimus ir kt. Realaus gyvenimo konteksto pavyzdžių nagrinėjimas, tikslinės diskusijos apie spaudoje, tyrimuose ir kitų mokomųjų dalykų turinyje pateikiamą statistinę informaciją turėtų padėti mokiniams suprasti, kokias išvadas galima remiantis pateikiama informacija. Svarbu, kad mokiniai suprastų, jog imties iš populiacijos sudarymo klausimas tampriai susijęs su pagrįstų išvadų darymu. Mokiniai turėtų įgyti bendrą supratimą apie tai, ką apie duomenų pasiskirstymą byloja juos aproksimuojančios kreivės forma ar apskaičiuotos duomenų centro ir sklaidos charakteristikos.

Tikimybių srities tematika 9–10 (I–II gimnazijos) klasėse palyginti su ankstesne programa nesikeičia. 10 (II gimnazijos) klasėje mokiniai išsiaiškins rinkinių sudarymo ypatumus, susipažins su kombinatorikos sudėties ir daugybos taisyklėmis, kas leis mokiniams spręsti kombinatorikos ir tikimybių uždavinius racionaliau. Rinkinių tipų (derinių, gretinių, kėlinių) pagrindinėje mokykloje nagrinėti nenumatyta.

I–II gimnazijos klasių matematikos mokymo turinių palyginimo lentelė

I gimnazijos klasė	II gimnazijos klasė
1. Skaičiai ir skaičiavimai	
Trigonometriniai skaičiai $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\mathrm{tg}(\alpha)$, kai $\alpha \in (0°; 90°)$.	Trigonometriniai skaičiai $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\mathrm{tg}(\alpha)$, kai $\alpha \in (0°; 180°)$. Aukso pjūvio skaičius $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Sudėtiniai procentai.
2. Modeliai ir sąryšiai	
2.1. Dėsningumai. *<u>Skaičių sekos</u>*. Skaičių seka apibrėžiama kaip funkcija, kurios apibrėžimo sritis yra natūraliųjų skaičių aibė $\mathbb{N}$. Paprastais atvejais mokoma(si) skaičių sekas aprašyti n-tojo nario formule, taip pat rekurentiniu būdu. Sprendžiami įvairaus konteksto uždaviniai, kai nagrinėjami, taikomi, derinami įvairūs skaičių sekų apibūdinimo būdai.	2.1. Dėsningumai. *<u>Sąryšiai</u>*. Nagrinėjamos probleminės situacijos, kuomet nustatomas matematinės informacijos trūkumas ir mokoma(si) ją susirasti, atsirinkti. Sprendžiami uždaviniai, į kuriuos atsakyti galima nevienareikšmiai, kurie turi daugiau negu vieną teisingą atsakymą. Praktikuojamasi sugalvoti naujus klausimus (sąlygą, uždavinį), nustatyti naujo uždavinio ryšį su anksčiau spręstuoju. *<u>Proporcingumas</u>*. Sprendžiami uždaviniai, kai skaičius, dydis padalijamas į dvi nelygias dalis, kuriuos sprendžiant reikia remtis proporcingąja dalyba. *<u>Skaičių sekos</u>*. Nagrinėjama Fibonačio skaičių seka, aukso pjūvio skaičius $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, aukso pjūvio seka (0,056; 0,090; 0,146; 0,236; …). *<u>Procentai ir santykiai</u>*. Sprendžiami su procentais ir dydžių santykiais susiję uždaviniai: džiovinimo ir drėkinimo; sudėtinių procentų; lydinių, mišinių, tirpalų.

I gimnazijos klasė	II gimnazijos klasė
2.2. Algebra. *Raidiniai reiškiniai*. Apibrėžiama kvadratinio trinario sąvoka, įrodoma jo skaidymo dauginamaisiais formulė; ji taikoma, sprendžiant uždavinius. Apibrėžiama trupmeninio racionaliojo reiškinio sąvoka, aptariama jo apibrėžimo sritis. Mokoma(si) pritaikyti žinomus sudėties ir daugybos dėsnius, veiksmų su laipsniais ir trupmenomis savybes, pertvarkant, prastinant nesudėtingus trupmeninius racionaliuosius reiškinius. *Kvadratinės lygtys*. Apibrėžiama antrojo laipsnio (kvadratinė) lygtis su vienu nežinomuoju. Įrodoma ir taikoma kvadratinės lygties sprendinių formulė. Nagrinėjamos diskriminanto reikšmės sąsajos su kvadratinės lygties sprendinių skaičiumi. Sprendžiami įvairaus konteksto uždaviniai, sudarant kvadratines lygtis. *Lygčių sistemos*. Mokoma(si) dviejų lygčių sistemas (su dviem nežinomaisiais), kurių viena lygtis yra pirmojo, o kita – ne aukštesnio kaip antrojo laipsnio, spręsti grafiniu ir keitimo būdais. Nagrinėjamos įvairios realaus pasaulio situacijos, kurios gali būti modeliuojamos lygčių sistemomis.	2.2. Algebra. *Trupmeninės racionaliosios lygtys*. Apibrėžiama trupmeninės racionaliosios lygties sąvoka. Mokoma(si) spręsti trupmenines racionaliąsias lygtis, joms suteikiant pavidalą $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$. Nagrinėjamos įvairios realaus pasaulio ir matematinės situacijos, kurios gali būti modeliuojamos racionaliosiomis lygtimis. *Kvadratinės nelygybės*. Apibrėžiama kvadratinės nelygybės sąvoka. Mokoma(si) kvadratines nelygybes spręsti algebriniu, t. y. kai pradinė kvadratinė nelygybė keičiama dviejų pirmojo laipsnio nelygybių sistemomis, ir grafiniu būdais. Diskutuojama apie algebrinio ir grafinio būdo taikymo ypatumus, kai šie būdai pasitelkiami kvadratinės funkcijos įvairioms savybėms nagrinėti. *Lygčių sistemos*. Nagrinėjamos lygčių sistemos (su dviem nežinomaisiais), kurių viena lygtis tiesinė, o kita tiesinė, kvadratinė ar trupmeninė racionalioji. Mokoma(si) įvairaus konteksto situacijas modeliuoti lygčių sistemomis.

I gimnazijos klasė	II gimnazijos klasė
2.3. Tiesiniai ir netiesiniai sąryšiai. *<u>Funkcijos samprata</u>*. Apibrėžiamos sąvokos: funkcija, funkcijos argumentas, funkcijos reikšmė, funkcijos apibrėžimo sritis, funkcijos reikšmių sritis, funkcijos grafikas. Mokoma(si) funkciją apibūdinti žodžiais, lentele, grafiku, formule (naudojantis ir skaitmeninėmis priemonėmis), apskaičiuoti ir (ar) nustatyti funkcijos reikšmes, kai yra žinoma funkcijos argumento reikšmė, ir atvirkščiai. Aiškinama(si), kuo funkcijos grafiko eskizas skiriasi nuo grafiko. Mokoma(si) nustatyti funkcijos apibrėžimo sritį, reikšmių sritį, funkcijos grafiko susikirtimo su koordinačių ašimis taškus; intervalus, kuriuose funkcija įgyja teigiamas ir neigiamas reikšmes; yra didėjančioji, mažėjančioji ar pastovioji. *<u>Tiesinė ir kvadratinė funkcijos</u>*. Sprendžiami uždaviniai, kai realaus gyvenimo situacijoms tyrinėti ir modeliuoti, eksperimento duomenims aprašyti, taikomos (pasitelkiamos) funkcijos. Išnagrinėjus tiesinės funkcijos modeliu aprašomus eksperimento duomenis, yra apibrėžiama tiesinė funkcija $y = kx + b$, tiesės krypties koeficientas k, postūmio koeficientas b. Braižant konkrečių tiesinių funkcijų grafikų eskizus (tieses), tyrinėjama, kaip tiesės padėtis priklauso nuo šių koeficientų reikšmių. Išnagrinėjus kvadratine funkcija aprašomus eksperimento duomenis, įvedama kvadratinės funkcijos $y = ax^2 + bx + c$, kai $a \neq 0$, sąvoka, braižomi jos grafiko (parabolės) eskizai. Tyrinėjama, kaip parabolės forma ir padėtis priklauso nuo a ir $D = b^2 - 4ac$ reikšmių. Naudojantis skaitmeninėmis priemonėmis, tyrinėjama, kaip, taikant transformacijas, iš funkcijos $y = x$ grafiko gauti funkcijos $y = kx + b$ grafiką, o iš funkcijos $y = x^2$ grafiko gauti funkcijos $y = a(x - m)^2 + n$ grafiką. Sprendžiami uždaviniai, kuriuose įvairios realaus pasaulio situacijos yra modeliuojamos funkcijomis: $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = a(x - m)^2 + n$, $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.	

I gimnazijos klasė	II gimnazijos klasė
3. Geometrija ir matavimai	
3.1. Figūros. *Plokštumos figūros*. Apibrėžiami centrinis ir įbrėžtinis kampai. Nagrinėjama centrinio ir įbrėžtinio kampo, kurie kerta tą patį lanką, savybė. Apibrėžiamos sąvokos: apskritimo liestinė, kirstinė, styga; skritulio išpjova, nuopjova. Paaiškinama, kad apskritimo lankas matuojamas ne tik ilgio matavimo vienetais, bet ir laipsniais. Aptariamos ir taikomos savybės: liestinės statmenumo spinduliui, susikertančiųjų liestinių atkarpų iki lietimosi su apskritimu taškų, susikertančiųjų stygų. Mokoma(si) remtis apibrėžimais ir įrodytais teiginiais, sprendžiant įvairius matematinio ir realaus konteksto uždavinius, įrodinėjant kitus teiginius. *Įvadas į trigonometriją*. Apibrėžiami sinusas, kosinusas ir tangentas stačiajame trikampyje. Apskaičiuojant panašiųjų trikampių atitinkamų kraštinių ilgių santykius, įsitikinama, kad jų reikšmės nepriklauso nuo trikampio dydžio. Įrodomos lygybės $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$, $\mathrm{tg}(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ ir sudaroma kampų 30°, 45°, 60° trigonometrinių reikšmių lentelė. Mokoma(si) naudotis skaičiuotuvu, apskaičiuojant apytiksles smailiojo kampo sinuso, kosinuso, tangento reikšmes. Sprendžiami įvairūs uždaviniai, kai taikomi sinuso, kosinuso, tangento stačiajame trikampyje apibrėžimai (pavyzdžiui, nustatyti objekto aukštį, rasti kelio nuolydį ar lėktuvo pakilimo kampą, apskaičiuoti atstumą iki neprieinamos vietos ir pan.).	3.1. Figūros. *Plokštumos figūros*. Nagrinėjant panašiųjų figūrų perimetrus, plotus, nustatomi dėsningumai, jie pagrindžiami ir taikomi, sprendžiant uždavinius. Tyrinėjamos ir pagrindžiamos trikampio pusiaukampinių, pusiaukraštinių savybės. Apibrėžiamos sąvokos: įbrėžtinis daugiakampis, apibrėžtinis daugiakampis. Suformuluojami ir pagrindžiami teiginiai apie į trikampį įbrėžto apskritimo ir apie trikampį apibrėžto apskritimo centrus. Mokoma(si) taikyti formules $S=rp$, $S=\frac{abc}{4R}$. Mokoma(si) pagrįsti ir taikyti įbrėžtinio ir apibrėžtinio keturkampio savybes. Mokoma(si) remtis apibrėžimais ir įrodytais teiginiais, sprendžiant įvairius matematinio ir realaus konteksto uždavinius, įrodinėjant kitus teiginius. *Įvadas į trigonometriją*. Apibrėžiamas vienetinis apskritimas ir posūkio kampas, posūkio kampo sinusas, kosinusas, tangentas, kai $\alpha\in(0°;180°)$. Išsiaiškinama, kaip apskaičiuojamos 120°, 135°, 150° kampų sinuso ir kosinuso reikšmės. Apibendrinama, kaip apskaičiuojamos bet kokio smailiojo ar bukojo kampo sinuso, kosinuso reikšmės ir įrodomos formulės: $\sin(180°-\alpha)=\sin(\alpha)$, $\cos(180°-\alpha)=-\cos(\alpha)$. Įrodoma trikampio ploto formulė $S=\frac{1}{2}ab\sin(\angle C)$, kosinusų teorema, sinusų teorema, mokoma(si) jas taikyti nežinomiems trikampio elementams rasti. Pagrindžiamas sinusų teoremos ir apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgio sąryšis. Praktikuojamasi taikyti šias teoremas, sprendžiant trikampių uždavinius.

I gimnazijos klasė	II gimnazijos klasė
4. Duomenys ir tikimybės	
4.1. Duomenys ir jų interpretavimas. *Koreliacija*. Nagrinėjamos taškinės (sklaidos) diagramos, vaizduojančios statistinį ryšį tarp dviejų kintamųjų (stebimų požymių) reikšmių. Mokoma(si) iš sklaidos diagramos įvertinti šio ryšio buvimą ar nebuvimą, aptariama, kokiais atvejais kalbama apie kintamųjų koreliacinį ryšį. Detaliau aptariama tiesinė koreliacija. Mokoma(si) užrašyti sklaidos diagramoje pavaizduotos tiesės lygtį $y = kx + b$, interpretuoti šia lygtimi aprašomą duomenų ryšį. Aptariama, kodėl negalima daryti išvados apie tiesinės priklausomybės egzistavimą populiacijoje, jei duomenys imtyje yra neatsitiktiniai ar jų yra per mažai.	4.1. Duomenys ir jų interpretavimas.* *Populiacija ir imtis*. Paaiškinama, kaip imties iš populiacijos sudarymas susijęs su pagrįstų išvadų darymu, ką vadiname duomenų rinkinių kintamumu, duomenų pasiskirstymu, kaip galima apibūdinti ir kiekybiškai interpretuoti duomenų rinkinius. Aptariamos sąvokos: dispersija, standartinis nuokrypis, skirstinys, normalusis skirstinys, simetriškasis skirstinys, asimetriškasis skirstinys. Nagrinėjant realaus gyvenimo konteksto pavyzdžius, diskutuojama apie duomenų rinkimą ir analizavimą. *Duomenų skaitinės charakteristikos*. Svarstoma, kokias išvadas apie duomenis leidžia daryti jų pasiskirstymą aproksimuojančios kreivės forma ar apskaičiuotos duomenų centro (pavyzdžiui, vidurkio) ir sklaidos (pavyzdžiui, standartinio nuokrypio, kvartilių) charakteristikos. Analizuojamas statistinis patikimumas. 4.2. Tikimybės ir jų interpretavimas. *Kombinatorika.* Aptariama, kas yra kelių elementų rinkinys, kaip užrašoma tokių rinkinių aibė. Mokoma(si) sudaryti rinkinius, kai elementai imami iš tos pačios aibės ar skirtingų aibių. Nagrinėjami pavyzdžiai, kai elementų tvarka rinkinyje svarbi ir kai nesvarbi. Aiškinama(si), kaip apskaičiuoti rinkinių skaičių, atsižvelgiant į elementų tvarkos rinkinyje svarbą. Aptariama, kada, skaičiuojant rinkinių skaičių, patogu naudotis kombinatorikos sudėties ir daugybos taisyklėmis. Rinkinių sudarymo įgūdžiai taikomi, sprendžiant tikimybių uždavinius. *Tikimybės*. Mokoma(si) įvertinti atsitiktinio įvykio tikimybę, renkant duomenis apie atsitiktinį procesą ir stebint jo ilgalaikį santykinį dažnį bei gautą rezultatą palyginant su teorine šio įvykio tikimybe (pavyzdžiui, šešiasienio kauliuko ridenimas iki 600 kartų ir kauliuko atvirtimo šešiomis akutėmis stebėjimas). *Ši sritis į PUPP tematiką neįtraukta.

Rekomenduotini žymenys

Rašoma	Skaitoma	Suprantama, vaizduojama, pavyzdžiai
$\{a; b; c\}$	Skaičių a, b ir c aibė	Aibė, kurios elementai yra skaičiai a, b ir c
$\cup$	Aibių sąjungos ženklas	$\{1; 2; 3\} \cup \{2; 3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$
$\cap$	Aibių sankirtos ženklas	$\{1; 2; 3\} \cap \{2; 3; 4\} = \{2; 3\}$
$\setminus$	Aibių skirtumo ženklas	$\{1; 2; 3\}\setminus\{2; 3; 4\} = \{1\}$
$\emptyset$	Tuščioji aibė	Aibė neturinti nė vieno elemento
$\mathbb{N}$	Natūraliųjų skaičių aibė	$\{1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Sveikųjų skaičių aibė	$\{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Racionaliųjų skaičių aibė	$\left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$
$\mathbb{I}$	Iracionaliųjų skaičių aibė	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \mathbb{I},\ \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	Realiųjų skaičių aibė	$(-\infty; +\infty)$
$\in$	Priklauso	$5 \in \mathbb{N}$ – skaičius 5 priklauso natūraliųjų skaičių aibei
$\notin$	Nepriklauso	$-5 \notin \mathbb{N}$ – skaičius -5 nepriklauso natūraliųjų skaičių aibei
$\sin(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\mathrm{tg}(\gamma)$	Sinus alfa, kosinus beta, tangent gama	Kampo, kurio didumas lygus α (β, γ) laipsnių, sinusas (kosinusas, tangentas)
$y = f(x)$	Funkcija igrek lygu ef nuo iks	Kiekvienai x reikšmei pagal taisyklę f priskiriama vienintelė y reikšmė
D_f	Funkcijos ef apibrėžimo sritis	Funkcijos argumento (x reikšmių) aibė
E_f	Funkcijos ef reikšmių sritis	Funkcijos reikšmių (y reikšmių) aibė
$f(x) \nearrow$	Didėjančioji funkcija	Kai $x_2 > x_1$, tai $f(x_2) > f(x_1)$
$f(x) \searrow$	Mažėjančioji funkcija	Kai $x_2 > x_1$, tai $f(x_2) < f(x_1)$
(a_n)	Skaičių seka a en	$a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$
a_n	Skaičių sekos a en entasis narys	a_1 – pirmasis sekos (a_n) narys
$a_n = a(n)$	Skaičių sekos entojo nario formulė	$a_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, natūraliųjų lyginių skaičių seka
$y = f(x) = kx + b$	Igrek lygu ef nuo iks lygu ka iks plius bė	Tiesinė funkcija (k ir b – realieji skaičiai, x – funkcijos nepriklausomasis kintamasis (argumentas), y – funkcijos priklausomasis kintamasis (funkcijos reikšmė))
$y = kx + b$	Igrek lygu ka iks plius bė	Kryptinė tiesės lygtis
$ax + by + c = 0$	A iks plius bė igrek plius cė lygu nuliui	Bendroji tiesės lygtis (a, b, c – realieji skaičiai)

$y = f(x) =$ $= ax^2 + bx + c$	Igrek lygu ef nuo iks lygu a iks kvadratu plius bė iks plius cė	Kvadratinė funkcija (a, b, c – realieji skaičiai, $a \neq 0$, x – funkcijos nepriklausomasis kintamasis (argumentas), y – funkcijos priklausomasis kintamasis (funkcijos reikšmė))
$y = ax^2 + bx + c$	Igrek lygu a iks kvadratu plius bė iks plius cė	Parabolės lygtis ($a \neq 0$)
$ax^2 + bx + c = 0$	A iks kvadratu plius bė iks plius cė lygu nuliui	Kvadratinės lygties standartinis pavidalas ($a \neq 0$)
$ax^2 + bx + c$	A iks kvadratu plius bė iks plius cė	Kvadratinis trinaris ($a \neq 0$)
$\overrightarrow{AB}$	Vektorius a bė	A – vektoriaus pradžios taškas B – vektoriaus pabaigos taškas
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	Vektoriaus a bė ilgis	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 5$ – vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgis lygus 5
$\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{GH}$	Vektoriai a bė ir gie haš yra vienakrypčiai	Vektoriai yra lygiagrečiose tiesėse arba vienoje tiesėje, o jų kryptys sutampa
$\overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EF}$	Vektoriai cė dė ir e ef yra priešpriešiniai	Vektoriai yra lygiagrečiose tiesėse arba vienoje tiesėje, o jų kryptys priešingos
$\overrightarrow{AB}(x; y)$	Vektoriaus a bė koordinatės yra iks ir igrek ($A(0; 0)$, $B(x; y)$)	$\overrightarrow{AB}(-1; 2)$ – vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinatės yra $x = -1$, $y = 2$. $A(0; 0)$, $B(-1; 2)$

I gimnazijos klasė

I gimnazijos klasės matematikos mokymo turinio nuoseklaus išdėstymo pavyzdys 2024/2025 m. m.

37 mokslo metų savaitės × **4** pamokos per savaitę = **148** pamokos per mokslo metus:
30 savaičių × **4** pamokos per savaitę = **120** pamokų – mokymo turinio įsisavinimas,
2 savaitės × **4** pamokos per savaitę = **8** pamokos – pagrindinės mokyklos I pakopos kurso kartojimas,
5 savaitės × **4** pamokos per savaitę = **20** pamokų – rezervinės pamokos.

1. Pagrindinės mokyklos kurso kartojimas. Diagnostinis darbas (8 pamokos)

2. Funkcijos ir sekos (16 pamokų)
- 2.1. Funkcijos samprata (4 pamokos)
- 2.2. Funkcijos savybės (4 pamokos)
- 2.3. Sekos (8 pamokos)

3. Tiesinė funkcija (12 pamokų)
- 3.1. Tiesinės funkcijos samprata (4 pamokos)
- 3.2. Tiesės lygtis (8 pamokos)

4. Kvadratinės lygties algebrinis sprendimas (16 pamokų)
- 4.1. Kvadratinės lygties samprata (4 pamokos)
- 4.2. Kvadratinės lygties sprendinių formulės (8 pamokos)
- 4.3. Kvadratinio trinario skaidymo tiesiniais dauginamaisiais formulė (4 pamokos)

5. Kvadratinė funkcija (20 pamokų)
- 5.1. Kvadratinės funkcijos samprata (4 pamokos)
- 5.2. Parabolė (8 pamokos)
- 5.3. Lygčių sistemos, kurių viena lygtis yra tiesinė, kita – kvadratinė (8 pamokos)

6. Trupmeniniai racionalieji reiškiniai (12 pamokų)
- 6.1. Trupmeninio racionaliojo reiškinio samprata (4 pamokos)
- 6.2. Veiksmai su trupmeniniais racionaliaisiais reiškiniais (8 pamokų)

7. Įvadas į trigonometriją (20 pamokų)
- 7.1. Panašieji trikampiai (8 pamokos)
- 7.2. Smailiojo kampo sinusas, kosinusas ir tangentas (8 pamokos)
- 7.3. Stačiojo trikampio sprendimas (4 pamokos)

8. Apskritimas ir skritulys (16 pamokų)
- 8.1. Apskritimas ir tiesė (8 pamokos)
- 8.2. Apskritimas ir kampas (8 pamokos)

9. Duomenys ir jų interpretavimas (8 pamokos)
- 9.1. Taškinė diagrama (4 pamokos)
- 9.2. Tiesinė koreliacija (4 pamokos)

„Matematika visiems, 9 klasė“

E. vadovėlis „Mokausi matematikos“

Leidykla TEV

TAI, KĄ PRIVALO MOKĖTI PROGIMNAZIJĄ BAIGĘS MOKINYS

1. Šaknys
1.1. Kvadratinės ir kubinės šaknies samprata
1.2. Veiksmai su šaknimis
1.3. Šaknies naikinimas trupmenos vardiklyje

2. Vektoriai
2.1. Vektoriaus samprata
2.2. Veiksmai su vektoriais
2.3. Vektoriai koordinačių plokštumoje

3. Lygčių sistemos
3.1. Tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais samprata
3.2. Dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos samprata
3.3. Dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos algebrinis sprendimas
3.4. Skyriaus „Lygčių sistemos“ uždaviniai

4. Panašieji trikampiai
4.1. Panašiųjų trikampių samprata
4.2. Trikampių panašumo požymiai
4.3. Panašieji trikampiai stačiajame trikampyje
4.4. Trikampio ir trapecijos vidurio linija

5. Erdviniai kūnai
5.1. Briaunainiai
5.2. Sukiniai
5.3. Taisyklingoji piramidė

1. Šaknys

1.1. Kvadratinės ir kubinės šaknies samprata

Kvadratine (antrojo laipsnio) šaknimi iš neneigiamo skaičiaus a vadinamas neneigiamas skaičius $\sqrt{a}$, kurio kvadratas (antrasis laipsnis) lygus skaičiui a:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \quad \text{čia } a \geq 0, \sqrt{a} \geq 0.$$

Pastaba. Kvadratinė šaknis iš **neigiamų** skaičių neturi prasmės, nes realiojo skaičiaus kvadratas visada yra neneigiamas skaičius.

$$\text{Jei } \sqrt{a} = b, \text{ tai } b^2 = a.$$

Pavyzdžiai

a) $\sqrt{9} = 3$, nes $3^2 = 9$ ir $3 > 0$; **Pastaba.** $\sqrt{9} \neq -3$, nes $-3 < 0$, nors $(-3)^2 = 9$.

b) $\sqrt{-9}$ realiųjų skaičių aibėje neturi prasmės, nes nėra realiojo skaičiaus, kurio antrasis laipsnis būtų lygus neigiamam skaičiui -9.

c) $\sqrt{1} = 1$, nes $1^2 = 1$ ir $1 > 0$; d) $\sqrt{0} = 0$, nes $0^2 = 0$ ir $0 = 0$.

Kubine (trečiojo laipsnio) šaknimi iš skaičiaus a vadinamas skaičius $\sqrt[3]{a}$, kurio kubas (trečiasis laipsnis) lygus skaičiui a:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a.$$

Pastaba. Kubinė šaknis turi prasmę, esant visoms pošaknio a reikšmėms.

$$\text{Jei } \sqrt[3]{a} = b, \text{ tai } b^3 = a.$$

Pavyzdžiai

a) $\sqrt[3]{8} = 2$, nes $2^3 = 8$ ir $3 > 0$; b) $\sqrt[3]{-8} = -2$, nes $(-2)^3 = -8$;

c) $\sqrt[3]{1} = 1$, nes $1^3 = 1$; d) $\sqrt[3]{-1} = -1$, nes $(-1)^3 = -1$;

e) $\sqrt[3]{0} = 0$, nes $0^3 = 0$.

1.2. Veiksmai su šaknimis

$\sqrt{\ }$	**Savybė**	**Pavyzdys**
1)	$\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}$	$\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$
2)	$\sqrt{a}-\sqrt{a}=0$	$\sqrt{5}-\sqrt{5}=0$
3)	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$	$\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5$
4)	$\sqrt{a}:\sqrt{a}=1$, kai $a\neq 0$	$\sqrt{5}:\sqrt{5}=1$
5)	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$	$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{3\cdot 5}=\sqrt{15}$
6)	$\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$, kai $b\neq 0$	$\sqrt{10}:\sqrt{2}=\sqrt{10:2}=\sqrt{5}$
7)	$a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$, kai $a\geq 0$	$3\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{18}$

$\sqrt[3]{\ }$	**Savybė**	**Pavyzdys**
1)	$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}=2\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}=2\sqrt[3]{5}$
2)	$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a}=0$	$\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5}=0$
3)	$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=\left(\sqrt[3]{a}\right)^2=\sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}=\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$
4)	$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a$	$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}=\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=5$
5)	$\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{a}=1$, kai $a\neq 0$	$\sqrt[3]{5}:\sqrt[3]{5}=1$
6)	$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a\cdot b}$	$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{3\cdot 5}=\sqrt[3]{15}$
7)	$\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a:b}$, kai $b\neq 0$	$\sqrt[3]{10}:\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{10:2}=\sqrt[3]{5}$
8)	$a\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3\cdot b}$	$3\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=\sqrt[3]{54}$

1.3. Šaknies naikinimas trupmenos vardiklyje

Trupmeną, kurios vardiklyje yra kvadratinė arba kubinė šaknis, galima pakeisti jai lygia trupmena, vardiklyje neturinčia šaknų:

1)

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b},$$

2)

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}.$$

Įrodymas

1)

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot 1 = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

2)

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b}} = \frac{a \cdot \left(\sqrt[3]{b}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{b}\right)^3} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}.$$

Pavyzdžiai

1)

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3};$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2)

$$\frac{5}{\sqrt[3]{3}} = \frac{5}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}} = \frac{5 \cdot \left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3} = \frac{5\sqrt[3]{9}}{3};$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

2. Vektoriai

2.1. Vektoriaus samprata

Vektoriumi vadinama atkarpa, kuri turi pradžią ir pabaigą.

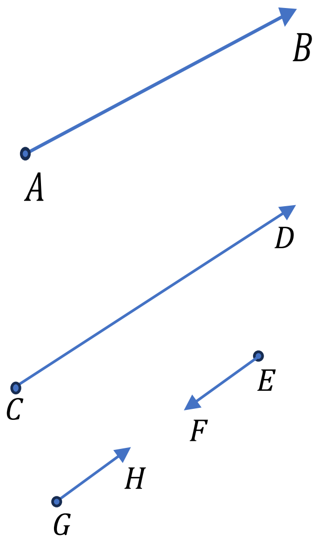
Vektoriaus ilgiu vadinamas vektorių ribojančios atkarpos ilgis.

Vienakrypčiais vektoriais vadinami vektoriai:
- kurie yra lygiagrečiose tiesėse arba vienoje tiesėje,
- kurių kryptys sutampa.

Priešpriešiniais vektoriais vadinami vektoriai:
- kurie yra lygiagrečiose tiesėse arba vienoje tiesėje,
- kurių kryptys priešingos.

Lygiais vektoriais vadinami vektoriai:
- kurių ilgiai yra lygūs,
- kurie yra vienakrypčiai.

Priešingais vektoriais vadinami vektoriai:
- kurių ilgiai yra lygūs,
- kurie yra priešpriešiniai.

***Vaizduojama*:**	***Rašoma*:**	***Skaitoma*:**	***Suprantama*:**
	$\overrightarrow{AB}$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	Vektorius AB Vektoriaus AB ilgis	A – vektoriaus pradžios taškas B – vektoriaus pabaigos taškas $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = AB$
	$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{GH}$	Vektoriai AB ir GH yra vienakrypčiai	Vektoriai AB ir GH yra lygiagrečiose tiesėse, o jų kryptys nukreiptos į tą pačią pusę
	$\overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EF}$	Vektoriai CD ir EF yra priešpriešiniai	Vektoriai CD ir EF yra lygiagrečiose tiesėse, o jų kryptys nukreiptos į priešingas puses
	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$	Vektoriai AB ir CD yra lygūs	Vektoriai AB ir CD yra vienakrypčiai, jų ilgiai – lygūs
	$\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{EF}$	Vektoriai GH ir EF yra priešingi	Vektoriai GH ir EF yra priešpriešiniai, jų ilgiai – lygūs

2.2. Veiksmai su vektoriais

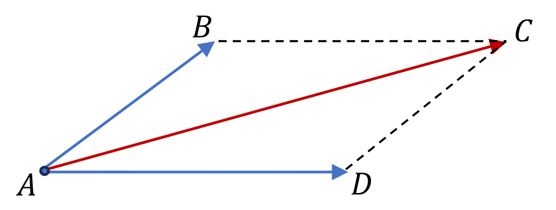
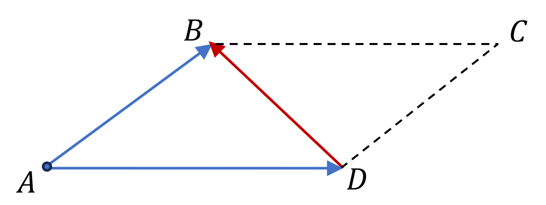
Su vektoriais galima atlikti veiksmus:

- vektorius galima **sudėti**;
- vektorius galima **atimti**;
- vektorių galima **padauginti iš skaičiaus**.

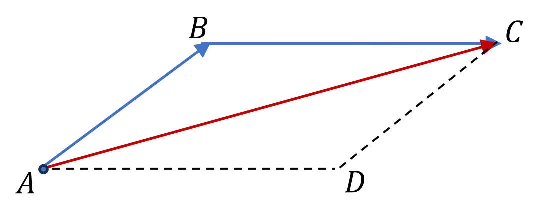
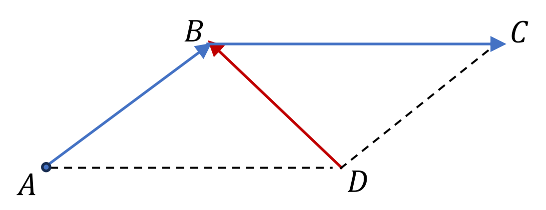
Šių veiksmų rezultatas yra vektorius:

- dviejų vektorių suma yra vektorius;
- dviejų vektorių skirtumas yra vektorius;
- vektoriaus ir skaičiaus sandauga yra vektorius.

Vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$, kurių pradžios sutampa (yra taške A), sumą ir skirtumą galima rasti naudojantis lygiagretainiu $ABCD$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$
	

Vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BC}$, kurių vieno pabaiga sutampa su kito pradžia (yra taške B), sumą ir skirtumą galima rasti naudojantis lygiagretainiu $ABCD$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$
	

Vektorių $\overrightarrow{AB}$ dauginдami iš skaičiaus n gauname vektorių $\overrightarrow{AC}$, kurio kryptis:

- sutampa su vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ kryptimi, kai $n > 0$ ($\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$),
- yra priešinga vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ krypčiai, kai $n < 0$ ($\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$),

o ilgis lygus vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgio ir skaičiaus n modulio sandaugai: $\left|\overrightarrow{AC}\right| = AB \cdot |n|$.

Pastaba

Vektorius, kurio pradžia ir pabaiga sutampa, vadinamas **nuliniu** vektoriumi. Rašoma: $\vec{0}$.

Nulinio vektoriaus ilgis lygus 0, o kryptis nėra apibrėžta.

Vektoriaus ir nulio sandauga lygi nuliniam vektoriui: $\overrightarrow{AB} \cdot 0 = \vec{0}$.

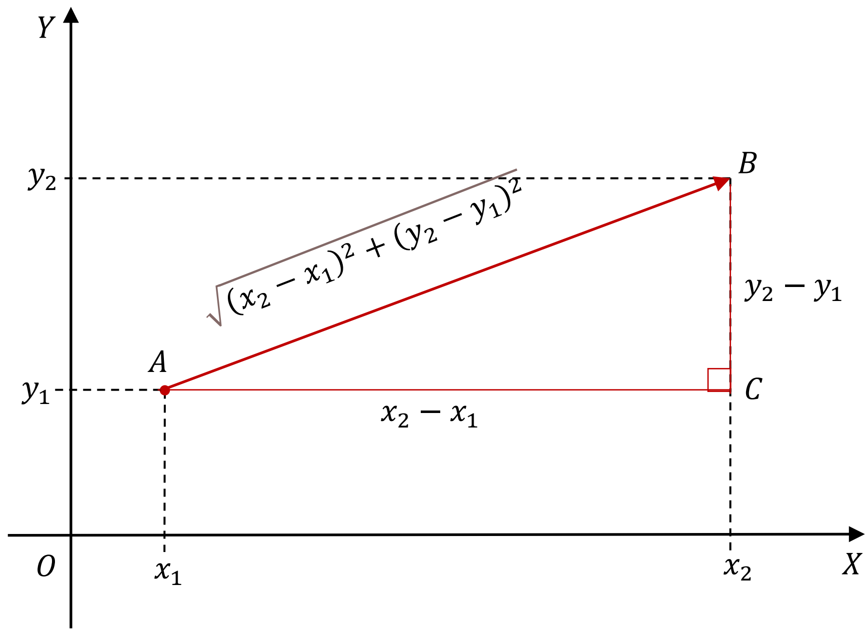
2.3. Vektoriai koordinačių plokštumoje

Vektorių $\overrightarrow{AB}$ galima pavaizduoti stačiakampėje koordinačių sistemoje OXY.

Žinant vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ pradžios ir pabaigos taškų koordinates $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ galima apskaičiuoti vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgį:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ši formulė įrodoma naudojantis Pitagoro teorema.



Pavyzdys

Vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ pradžios taško koordinatės yra $A(4; 3)$, o pabaigos taško koordinatės – $B(-1; 2)$.

Šio vektoriaus ilgis lygus:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}.$$

3. Lygčių sistemos

3.1. Tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais samprata

Tiesine lygtimi su dviem nežinomaisiais (pirmojo laipsnio lygtimi su dviem nežinomaisiais) vadinama lygtis, kurią galima užrašyti taip:

$$ax + by + c = 0,$$

čia:

- x, y – lygties nežinomieji,
- a, b, c – lygties koeficientai ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

Lygtis turi prasmę su visomis lygties nežinomųjų reikšmėms ($x, y \in \mathbb{R}$).

Lygties sprendiniu vadinama lygties nežinomųjų reikšmių pora $(x; y)$, su kuria lygtis tampa teisinga skaitine lygybe.

Tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais turi **be galo daug sprendinių**.

Pavyzdys

$2x - y + 3 = 0$ – tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais x ir y;

$a = 2,\ b = -1,\ c = 3$ – lygties koeficientai;

$x = 5, y = 13$ – lygties sprendinys, nes lygybė $2 \cdot 5 - 13 + 3 = 0$ yra teisinga;

$x = 4, y = 6$ – nėra lygties sprendinys, nes lygybė $2 \cdot 4 - 6 + 3 = 0$ nėra teisinga.

3.2. Dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos samprata

Kalbant (rašant) apie dviejų lygčių su tais pačiais dviem nežinomaisiais **bendruosius sprendinius** naudojamasi terminu „lygčių sistema“ ir riestiniu skliaustu „{“.

Lygčių sistema, kurią galima užrašyti taip

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ dx + ey + f = 0; \end{cases}$$

čia:

- x, y – lygčių sistemos nežinomieji,
- a, b, c, d, e, f – lygčių sistemos lygčių koeficientai ($a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$),

vadinama **dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais x ir y sistema**.

Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais x ir y **sistemos sprendiniu** vadinama skaičių pora $(x; y)$, su kuria sistemos abi lygtys tampa teisingomis skaitinėmis lygybėmis.

Išspręsti dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą, reiškia rasti visus jos sprendinius arba įsitikinti, kad sistema sprendinių neturi.

Pavyzdys

$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ x - y - 9 = 0, \end{cases}$ – dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais x ir y sistema;

$2x - y + 3 = 0$ – sistemos pirmoji lygtis yra tiesinė, jos koeficientai $a = 2,\ b = -1,\ c = 3$;
$x - y - 9 = 0$ – sistemos antroji lygtis yra tiesinė, jos koeficientai $a = 1,\ b = -1,\ c = -9$.

Skaičių pora $(5; 7)$ *nėra* sistemos sprendinys, nes ši pora nėra antrosios lygties $x - y - 9 = 0$ sprendinys:

kai $x = 5, y = 7$, tai lygybė

$$5 - 7 - 9 = 0$$

yra ***neteisinga***.

Skaičių pora $(-12; -21)$ *yra* sistemos sprendinys, nes ši pora yra abiejų lygčių sprendinys:

kai $x = -12, y = -9$, tai teisingos abi lygybės:

$$2 \cdot (-12) - (-21) + 3 = 0,$$

$$-12 - (-21) - 9 = 0.$$

3.3. Dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos algebrinis sprendimas

Išspręsti dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą, reiškia rasti visus jos sprendinius arba įsitikinti, kad sistema sprendinių neturi.

Dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

galima išspręsti naudojantis šiais algebriniais būdais:

- **keitimo** būdu;
- **sudėties** būdu;
- **sulyginimo** būdu.

Sistemą spręsdami **keitimo būdu**:

1) iš sistemos vienos lygties išsireiškiame kurį nors nežinomąjį;
2) gautą išraišką įrašome į sistemos kitą lygtį – gauname lygtį su vienu nežinomuoju;
3) išsprendžiame gautą lygtį su vienu nežinomuoju – apskaičiuojame sistemos vieno nežinomojo reikšmę;
4) gautą nežinomojo reikšmę įrašome į 1) punkte gautą išraišką – apskaičiuojame sistemos kito nežinomojo reikšmę.

Sistemą spręsdami **sudėties būdu**:

1) jei reikia, tai sistemos lygtis pertvarkome taip, kad abiejų lygčių koeficientai prie kurio nors nežinomojo būtų venas kitam priešingi skaičiai;
2) sudedame sistemos abi lygtis – gauname lygtį su vienu nežinomuoju;
3) išsprendžiame gautą lygtį su vienu nežinomuoju – apskaičiuojame to nežinomojo reikšmę;
4) gautą nežinomojo reikšmę įrašome į sistemos kurią nors lygtį – gauname lygtį su vienu nežinomuoju;
5) išsprendžiame gautą lygtį su vienu nežinomuoju – apskaičiuojame sistemos kito nežinomojo reikšmę.

Sistemą spręsdami **sulyginimo būdu**:

1) iš sistemos abiejų lygčių išsireiškiame kurį nors tą patį nežinomąjį;
2) sulyginame gautas išraiškas – gauname lygtį su vienu nežinomuoju;
3) išsprendžiame gautą lygtį su vienu nežinomuoju – apskaičiuojame to nežinomojo reikšmę;
4) gautą nežinomojo reikšmę įrašome į sistemos 1) punkte gautą išraišką – apskaičiuojame kito nežinomojo reikšmę.

4. Panašieji trikampiai

4.1. Panašiųjų trikampių samprata

Panašiaisiais trikampiais vadinami trikampiai, kurių vieno:

- kampai yra lygūs kito trikampio atitinkamiems kampams;
- kraštinės yra proporcingos kito trikampio atitinkamoms kraštinėms.

Panašiųjų trikampių atitinkamų kraštinių ilgių santykis vadinamas trikampių **panašumo koeficientu**. Jis dažnai žymimas raide k.

Rašoma:

$$\triangle ABC \backsim \triangle DEF.$$

Skaitoma:

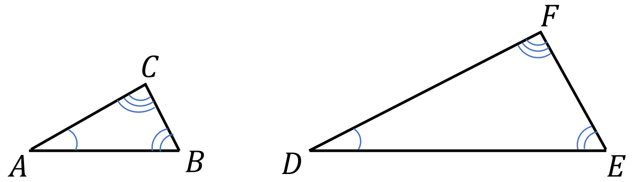
Trikampis *ABC* panašus į trikampį *DEF*.

Suprantama:

$$\angle A = \angle D,\ \ \angle B = \angle E,\ \ \angle C = \angle F;$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}\ (= k).$$

Vaizduojama:



Pastabos

1. Jei trikampių panašumo koeficientas lygus vienam ($k = 1$), tai trikampiai yra lygūs.

2. Jei $\triangle_1 \backsim \triangle_2,\ \ \triangle_2 \backsim \triangle_3$, tai $\triangle_1 \backsim \triangle_3$.

4.2. Trikampių panašumo požymiai

Norint įsitikinti, kad du trikampiai ($\triangle ABC$ ir $\triangle DEF$) yra panašūs ($\triangle ABC \backsim \triangle DEF$) turime, naudodamiesi **panašiųjų trikampių apibrėžimu** įsitikinti, kad teisingos yra šešios lygybės:

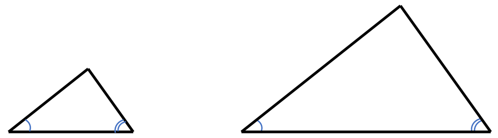
$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F; \qquad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}, \quad \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}, \quad \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

Įrodyta, kad nebūtina tikrinti visas šias šešias lygybes.

Teisingi yra teiginiai (jie vadinami **trikampių panašumo požymiais**), kuriais galima naudotis įrodant trikampių panašumą.

1. Trikampių panašumo požymis *pagal du lygius kampus*.

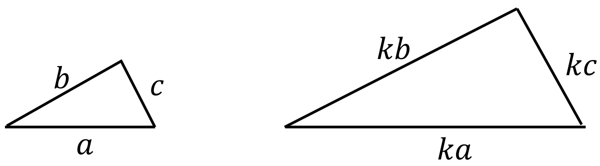
Jei vieno trikampio kampai yra lygūs kito trikampio kampams, tai trikampiai yra panašūs.



Pastaba. Jei vieno trikampio du kampai yra lygūs kito trikampio dviem kampams, tai ir tretieji trikampių kampai yra lygūs, nes trikampio kampų dydžių suma lygi 180°. Todėl naudojantis šiuo požymiu pakanka įsitikinti, kad vieno trikampio du kampai yra lygūs kito trikampio dviem kampams.

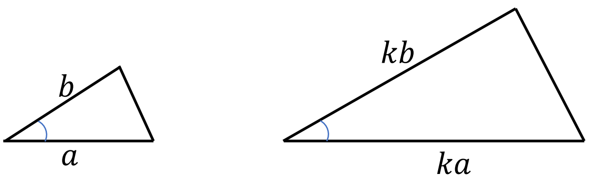
2. Trikampių panašumo požymis *pagal tris proporcingas kraštines*.

Jei vieno trikampio kraštinės yra proporcingos kito trikampio kraštinėms, tai trikampiai yra panašūs.



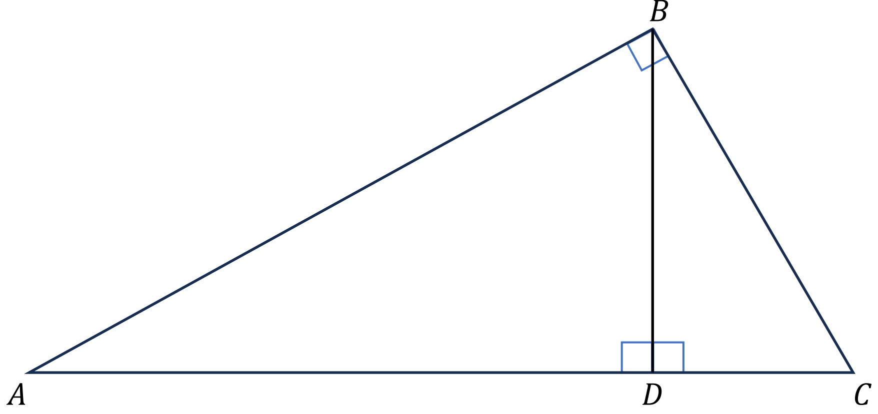
3. Trikampių panašumo požymis *pagal dvi proporcingas kraštines ir lygų kampą tarp jų*.

Jei vieno trikampio dvi kraštinės yra proporcingos kito trikampio dviem kraštinėms ir kampai tarp tų kraštinių yra lygūs, tai trikampiai panašūs.



4.3. Panašieji trikampiai stačiajame trikampyje

Stačiojo trikampio aukštinė, nubrėžta į įžambinę, padalija trikampį į du panašiuosius trikampius. Kiekvienas šių trikampių yra panašus į pradinį trikampį.



Duota. $\triangle ABC, \angle B = 90°, BD \perp AC, D \in AC$.

Įrodyti. 1) $\triangle ADB \sim \triangle ABC$; 2) $\triangle CDB \sim \triangle CBA$; 3) $\triangle ADB \sim \triangle BDC$.

Įrodymas.

1) Įrodykime, kad $\triangle ADB \sim \triangle ABC$.

Trikampiai yra panašūs pagal trikampių *dviejų lygių kampų* panašumo požymį:

Jei vieno trikampio du kampai lygūs kito trikampio dviem kampams, tai trikampiai panašūs.

Iš tikrųjų:

$\angle BAD = \angle BAC$, nes jis yra bendras abiems trikampiams;

$\angle ADB = \angle ABC$, nes jie abu yra statūs.

2) Įrodykime, kad $\triangle CDB \sim \triangle CBA$. Įrodymas analogiškas 1)-majam punktui.

$\angle BCD = \angle ACB$, nes jie abu yra bendri abiems trikampiams;

$\angle CDB = \angle CBA$, nes jie abu yra statūs.

Vadinasi, trikampiai yra panašūs pagal trikampių *lygių kampų* panašumo požymį.

3) Įrodykime, kad $\triangle ADB \sim \triangle BDC$.

$\triangle ADB \sim \triangle ABC$ ir $\triangle CDB \sim \triangle CBA$ – abu mažesnieji trikampiai yra panašūs į pradinį trikampį, todėl jie panašūs ir vienas į kitą.

Įrodyta.

Uždavinys

Stačiojo trikampio ABC ($\angle B = 90°$) statinių ilgiai yra $AB = 8, BC = 6$.

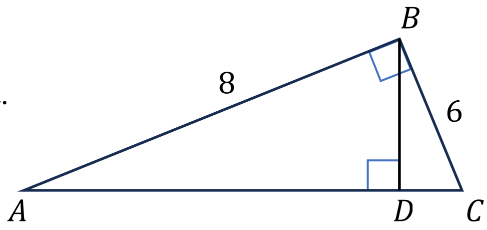
1) Apskaičiuokime trikampio įžambinės AC ilgį.

2) Apskaičiuokime trikampio aukštinės BD, nubrėžtos į įžambinę AC, ilgį.

3) Apskaičiuokite panašiųjų trikampių panašumo koeficientus:

a) $\triangle ADB \sim \triangle ABC,\ k_1$; b) $\triangle CDB \sim \triangle CBA,\ k_2$; c) $\triangle ADB \sim \triangle BDC,\ k_3$.

Sprendimas



Nusibraižykime trikampį ir užsirašykime, kas yra žinoma.
Duota.
$\triangle ABC,\ \angle B = 90°,\ BD \perp AC,\ D \in AC$;
$AB = 8, BC = 6$.

1) Pagal Pitagoro teoremą:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$,

$AC^2 = 8^2 + 6^2$,

$AC^2 = 100$,

$AC = -10$, – netinka, nes kraštinės ilgis neigiamas būti negali,

$AC = 10$.

2) Apskaičiuokime dvigubą trikampio ABC plotą dviem būdais:

$2S_{\triangle ABC} = AB \cdot BC = 8 \cdot 6 = 48$, $2S_{\triangle ABC} = AC \cdot BD = 10 \cdot BD$.

Vadinasi, $10 \cdot BD = 48$, $BD = 4{,}8$.

3) a) $\triangle ADB \sim \triangle ABC,\ k_1$.

Panašių trikampių atitinkamų kraštinių ilgių santykis lygus panašumo koeficientui. Šių trikampių įžambinės AB ir AC yra viena atitinkamų kraštinių pora, todėl

$$k_1 = \frac{AC}{BC} = \frac{10}{8} = 1{,}25.$$

Analogiškai:

b) $\triangle CDB \sim \triangle CBA,\ k_2$.

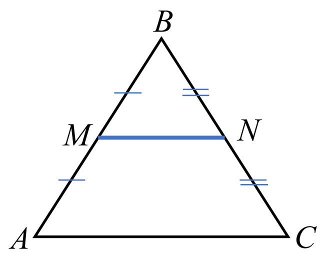
$k_2 = \frac{AC}{AB} = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3}$.

c) $\triangle ADB \sim \triangle BDC,\ k_3$.

$k_3 = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}$.

Atsakymas. 1) $AC = 10$; 2) $BD = 4{,}8$; 3) a) $k_1 = 1{,}25, k_2 = 1\frac{2}{3}, k_3 = 1\frac{1}{3}$.

4.4. Trikampio ir trapecijos vidurio linijos



Trikampio vidurio linija vadinama atkarpa,
jungianti dviejų trikampio kraštinių vidurio taškus.

MN – trikampio ABC vidurio linija, nes $AM = MB, BN = NC$.

Trikampis turi tris vidurio linijas.

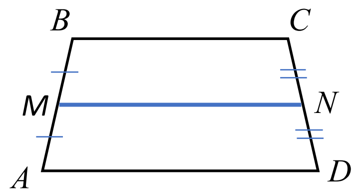
Trikampio vidurio linijos savybės

Trikampio vidurio linija:

- nuo trikampio atkerta panašų į jį trikampį;
  $\triangle MBN \backsim \triangle ABC$.
- yra lygiagreti su prieš ja esančia trikampio kraštine;
  $MN \parallel AC$.
- yra dvigubai trumpesnė už prieš ją esančią trikampio kraštinę.
  $MN = \frac{AC}{2}$.

Trikampio vidurio linijos sudalija trikampį į keturis lygius trikampius:

$$\triangle AMP = \triangle MBN = \triangle PNC = \triangle NPM$$



Trapecijos vidurio linija vadinama atkarpa,
jungianti trapecijos šoninių kraštinių vidurio taškus.

MN – trapecijos $ABCD$ vidurio linija, nes $AM = MB, CN = ND$

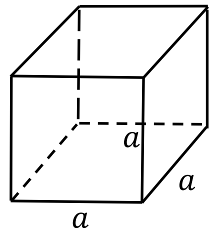
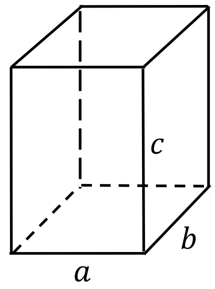
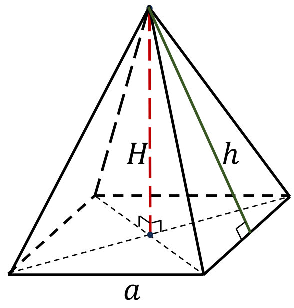
Trapecijos vidurio linijos savybės

Trapecijos vidurio linija:

- yra lygiagreti su trapecijos pagrindais:
  $MN \parallel AD, \;\; MN \parallel BC$.
- yra dvigubai trumpesnė už trapecijos pagrindų ilgių sumą:
  $MN = \frac{AD+BC}{2}$.

5. Erdviniai kūnai

5.1. Briaunainiai

Kubas	Stačiakampis gretasienis	Taisyklingoji keturkampė piramidė
		
Sienos yra lygūs kvadratai. a – briaunos ilgis.	Sienos yra stačiakampiai. a, b, c – briaunų ilgiai.	Pagrindas yra kvadratas. Šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai. a – pagrindo kraštinės ilgis, H – piramidės aukštinės ilgis, h – apotemos (šoninės sienos aukštinės) ilgis.
$S_{\text{pagr.}} = a^2$ $S_{\text{šon.}} = 4a^2$ $S_{\text{pav.}} = 6a^2$ $V = a^3$	$S_{\text{pagr.}} = ab$ $S_{\text{šon.}} = 2(ac + bc)$ $S_{\text{pav.}} = 2(ab + bc + ac)$ $V = abc$	$S_{\text{pagr.}} = a^2$ $S_{\text{šon.}} = 2ah$ $S_{\text{pav.}} = a^2 + 2ah$ $V = \frac{1}{3}a^2H$

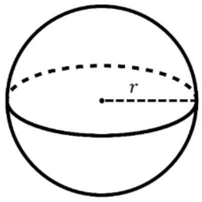
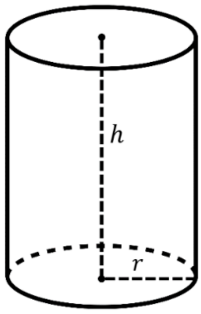
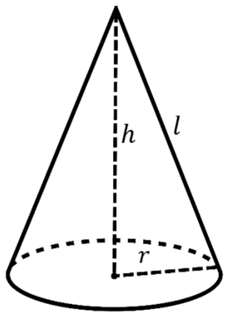
$S_{\text{pagr.}}$ – pagrindo plotas,

$S_{\text{šon.}}$ – šoninio paviršiaus plotas,

$S_{\text{pav.}}$ – viso paviršiaus plotas,

V – tūris.

5.2. Sukiniai

Rutulys	Ritinys	Kūgis
		
Rutulys gaunamas sukant skritulį apie jo skersmenį.	Ritinys gaunamas sukant stačiakampį apie jo kraštinę.	Kūgis gaunamas sukant statųjį trikampį apie jo statinį.
$S = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$S_{\text{pagr.}} = \pi r^2$ $S_{\text{šon.}} = 2\pi r h$ $S_{\text{pav.}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ $V = \pi r^2 h$	$S_{\text{pagr.}} = \pi r^2$ $S_{\text{šon.}} = \pi r l$ $S_{\text{pav.}} = \pi r^2 + \pi r l$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$S_{\text{pagr.}}$ – pagrindo plotas,

$S_{\text{šon.}}$ – šoninio paviršiaus plotas,

$S_{\text{pav.}}$ – viso paviršiaus plotas,

V – tūris.

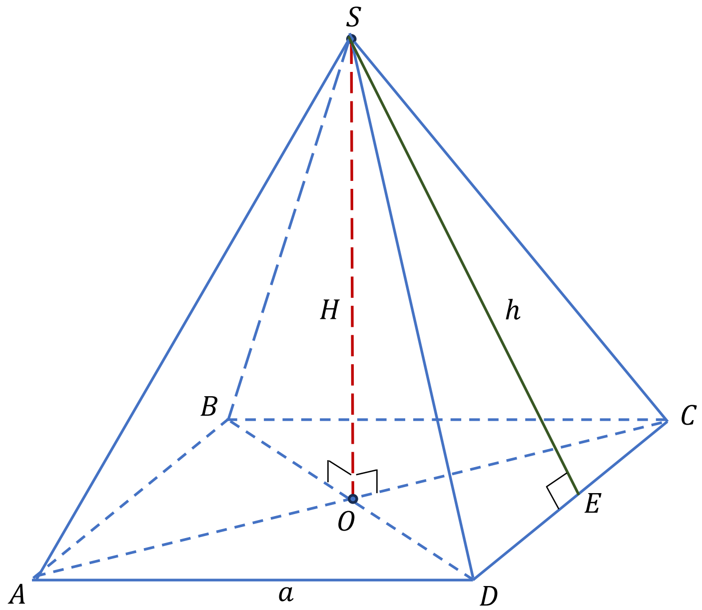
5.3. Taisyklingoji piramidė

Taisyklingąja piramide vadinama piramidė, kurios:

- pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis (lygiakraštis trikampis, kvadratas, taisyklingasis penkiakampis, ...),
- šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai.

Taisyklingosios piramidės aukštinės vienas galas (jis vadinamas *piramidės aukštinės pagrindu*) sutampa su piramidės pagrindo centro tašku.

Taisyklingosios piramidės šoninės sienos aukštinė vadinama **piramidės apotema**.



Paveiksle pavaizduota **taisyklingoji keturkampė piramidė** $SABCD$:

S – piramidės viršūnė;

A, B, C, D – piramidės pagrindo viršūnės, $ABCD$ – piramidės pagrindas (kvadratas):

$$AB = BC = CD = DA = a;$$

SA, SB, SC, SD – piramidės šoninės briaunos:

$$SA = SB = SC = SD;$$

SE – piramidės apotema (šoninės sienos aukštinė): $SE = h$;

SO – piramidės aukštinė: $SO = H$.

Progimnazijos matematikos kurso diagnostinis darbas

1. Apskaičiuokite skaitinio reiškinio reikšmę:

a) $\frac{3}{8} \cdot 2\frac{4}{9} - 1\frac{5}{6}$; (*2 taškai*)

b) $-1^4 + (-0{,}2)^{-1}$; (*2 taškai*)

c) $\left(-1\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(-1\frac{2}{3}\right)^{-3} - \frac{2}{3}$; (*2 taškai*)

d) $\sqrt{64} + 2\sqrt[3]{-64} - \sqrt{1\frac{9}{16}}$. (*2 taškai*)

2. Atskliauskite ir, jei įmanoma, sutraukite panašiuosius narius:

a) $(a+3)(2-a)$; (*2 taškai*)

b) $(4-x)^2$; (*1 taškas*)

c) $(a-7)(a+7)$; (*1 taškas*)

d) $\left(\frac{2}{5} - 6a\right)^2 - \frac{2}{5}(10-a)$. (*3 taškai*)

3. Išspręskite lygtį:

a) $x + 6 = 5x + 9$; (*1 taškas*)

b) $\frac{6x-5}{7} = \frac{2x+1}{3} + 2$; (*2 taškai*)

c) $x^2 - 5x = 0$; (*2 taškai*)

d) $2x^2 - 32 = 0$; (*2 taškai*)

e) $x^2 - 12x + 36 = 0$. (*2 taškai*)

4. Išspręskite nelygybę:

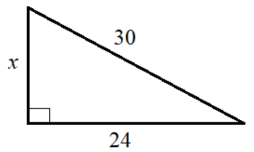
a) $2x - 4 > -6$; (*2 taškai*)

b) $3\frac{1}{2} - \frac{4}{5}x \leq 1\frac{1}{2}$. (*2 taškai*)

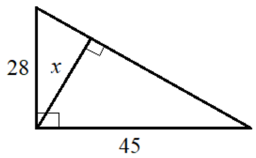
5. Baltasis lokys sveria 700 kg, o rudojo lokio masė sudaro 45 % baltojo lokio masės. Apskaičiuokite, kiek kilogramų sveria rudasis lokys. (*2 taškai*)

6. Apskaičiuokite x reikšmę:

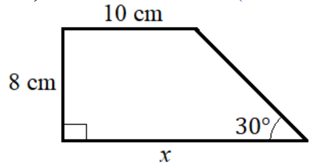
a) (*2 taškai*)



b) (*2 taškai*)



c) (*3 taškai*)



7. Muilo gabalas yra stačiakampio gretasienio formos. Jo matmenys 8 cm, 6 cm ir 2 cm. Kas dieną muilo sunaudojama po lygiai. Per 6 dienas visi gabalo matmenys sumažėjo du kartus. Apskaičiuokite, kelioms dienoms dar užtektų šio muilo, jeigu jo sunaudojimas nekistų. (*3 taškai*)

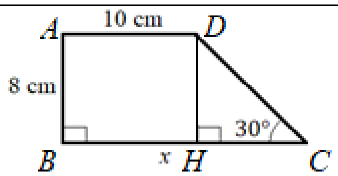
Taškai	0–4	5–8	9–12	13–16	17–20	21–24	25–28	29–32	33–36	37–40
Balai	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Progimnazijos matematikos kurso diagnostinio darbo *Vertinimo instrukcija*

Užd. Nr.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
1		**8**	
1a		**2**	
	$\frac{3}{8}\cdot 2\frac{4}{9}-1\frac{5}{6}=\frac{3}{8}\cdot\frac{22}{9}-\frac{11}{6}=\frac{11}{12}-\frac{11}{6}=$	1	Už teisingą daugybos veiksmą.
	$=\frac{11}{12}-\frac{22}{12}=-\frac{11}{12}$. *Atsakymas.* $-\frac{11}{12}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
1b		**2**	
	$-1^4+(-0{,}2)^{-1}=-1+\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}=$ $=-1+(-5)=$	1	Už teisingą pakėlimą laipsniu.
	$=-6$. *Atsakymas.* -6.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
1c		**2**	
	$\left(-1\frac{2}{3}\right)^{-2}:\left(-1\frac{2}{3}\right)^{-3}-\frac{2}{3}=$ $=\left(-1\frac{2}{3}\right)^{1}-\frac{2}{3}=-1\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=$	1	Už teisingą laipsnių dalybos veiksmą.
	$=-1\frac{4}{3}=-2\frac{1}{3}$. *Atsakymas.* $-2\frac{1}{3}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
1d		**2**	
	$\sqrt{64}+2\sqrt[3]{-64}-\sqrt{1\frac{9}{16}}=$ $=8+2\cdot(-4)-\sqrt{\frac{25}{16}}=8-8-\frac{5}{4}=$	1	Už teisingai ištrauktas šaknis.
	$=8-8-\frac{5}{4}=-\frac{5}{4}=-1\frac{1}{4}$. *Atsakymas.* $-1\frac{1}{4}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
2		**7**	
2a		**2**	
	$(a+3)(2-a)=2a-a^2+6-3a=$	1	Už teisingą atskliautimą.
	$=-a^2-a+6$. *Atsakymas.* $-a^2-a+6$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
2b		**1**	
	$(4-x)^2=4^2-2\cdot4\cdot x+x^2=$ $=16-8x+x^2$. *Atsakymas.* $16-8x+x^2$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
2c		**1**	
	$(a-7)(a+7)=a^2-7^2=a^2-49$. *Atsakymas.* a^2-49.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2d		**3**	
	$\left(\frac{2}{5}-6a\right)^2-\frac{2}{5}(10-a)=$ $=\left(\frac{2}{5}\right)^2-2\cdot\frac{2}{5}\cdot 6a+(6a)^2-4+\frac{2}{5}a=$ $=\frac{4}{25}-\frac{24}{5}a+36a^2-4+\frac{2}{5}a=$	2	Už kiekvieną teisingą atskliautimą.
	$=36a^2-\frac{22}{5}a-3\frac{21}{25}=36a^2-4\frac{2}{5}a-3\frac{21}{25}$. *Atsakymas.* $36a^2-4\frac{2}{5}a-3\frac{21}{25}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
3		**9**	
3a		**1**	
	$x+6=5x+9,$ $x-5x=9-6,$ $-4x=3,$ $x=-\frac{3}{4}.$ *Atsakymas.* $x=-\frac{3}{4}$.	1	Už gautą teisingą sprendinį.
3b		**2**	
	$\frac{6x-5}{7}=\frac{2x+1}{3}+2,$ $\frac{3(6x-5)}{21}=\frac{7(2x+1)}{21}+2,$ $\frac{18x-15}{21}=\frac{14x+7}{21}+2,$ $\frac{18x-15}{21}\cdot 21=\frac{14x+7}{21}\cdot 21+2\cdot 21,$ $18x-15=14x+7+42,$	1	Už teisingai pertrvarkytą lygtį.
	$18x-14x=15+7+42,$ $4x=64,$ $x=16.$ *Atsakymas.* $x=16$.	1	Už gautą teisingą sprendinį.
3c		**2**	
	$x^2-5x=0,$ $x(x-5)=0,$	1	Už teisingą išskaidymą dauginamaisiais.
	$x=0$ arba $x-5=0,$ $x=5.$ *Atsakymas.* $x=0$, $x=5$.	1	Už gautus teisingus sprendinius.
3d		**2**	
	$2x^2-32=0,$ $2(x^2-16)=0,$ $2(x-4)(x+4)=0,$ $(x-4)(x+4)=0,$	1	Už teisingą išskaidymą dauginamaisiais.
	$x-4=0$, arba $x+4=0,$ $x=4;$ $x=-4.$ *Atsakymas.* $x=-4$, $x=4$.	1	Už gautus teisingus sprendinius.

3e		**2**	
	$x^2 - 12x + 36 = 0,$ $(x-6)^2 = 0,$ $(x-6)(x-6) = 0,$	1	Už teisingą išskaidymą dauginamaisiais.
	$x - 6 = 0,$ $x = 6.$ *Atsakymas.* $x = 6.$	1	Už gautą teisingą sprendinį.
4		**4**	
4a		**2**	
	$2x - 4 > -6,$ $2x > -2,$ $x > -1.$	1	Už gautą teisingą nelygybės sprendinį, užrašytą nelygybe.
	$x \in (-1;\ +\infty).$ *Atsakymas.* $x \in (-1;\ +\infty).$	1	Už teisingą sprendinį, užrašytą intervalu.
4b		**2**	
	$3\frac{1}{2} - \frac{4}{5}x \leq 1\frac{1}{2},$ $-\frac{4}{5}x \leq 1\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2},$ $-\frac{4}{5}x \leq -2,$ $x \geq -2 : \left(-\frac{4}{5}\right),$ $x \geq \frac{10}{4},$ $x \geq 2\frac{1}{4}.$	1	Už gautą teisingą nelygybės sprendinį, užrašytą nelygybe.
	$x \in \left[2\frac{1}{4}; +\infty\right).$ *Atsakymas.* $x \in \left[2\frac{1}{4}; +\infty\right).$	1	Už teisingą sprendinį, užrašytą intervalu.
5		**2**	
	$700 \cdot 0{,}45 =$	1	Už teisingo skaitinio reiškinio sudarymą.
	$= 315$ (kg). *Atsakymas.* 315 kg.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
6		**7**	
6a		**2**	
	$x^2 = 30^2 - 24^2,$ $x^2 = 324,$	1	Už teisingą Pitagoro teoremos pritaikymą.
	$x = 18,\quad x = -18$ netinka, nes $x > 0.$ *Atsakymas.* $x = 18.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

6b		**2**	
	Stačiojo trikampio įžambinės ilgį pažymėkime c. Pagal Pitagoro teoremą: $c^2 = 28^2 + 45^2$, $c^2 = 2809$, $c = 53$, $c = -53$ netinka, nes $c > 0$.	1	Už teisingo sprendimo būdo pasirinkimą.
	$S_{\text{trik.}} = \frac{53 \cdot x}{2}$, $S_{\text{trik.}} = \frac{28 \cdot 45}{2}$, $\frac{53 \cdot x}{2} = \frac{28 \cdot 45}{2}$, $53 \cdot x = 28 \cdot 45$, $x = \frac{28 \cdot 45}{53} = \frac{1260}{53} = 23\frac{41}{53}$. *Atsakymas.* $x = 23\frac{41}{53}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
6c		**3**	
	 Nubrėžkime stačiosios trapecijos aukštinę DH: $DH = AB = 8$. Nagrinėkime statųjį trikampį DHC: $\angle DHC = 90°$, $\angle DCH = 30°$. $DC = 2DH$, nes statinio prieš 30° kampą DH ilgis 2 kartus mažesnis už įžambinės DC ilgį. $DC = 2 \cdot 8 = 16$.	1	Už teisingo sprendimo būdo pasirinkimą.
	$HC^2 = DC^2 - DH^2$, $HC^2 = 16^2 - 8^2$, $HC^2 = 192$, $HC = \sqrt{192} = \sqrt{64 \cdot 3} = 8\sqrt{3}$, $HC = -8\sqrt{3}$ netinka, nes $HC > 0$.	1	Už gautą teisingą atkarpos HC ilgį.
	$x = HC + BH$. $BH = AD$, nes $AD \parallel BC$, todėl $BH = 10$. $x = 8\sqrt{3} + 10$ (cm). *Atsakymas.* $x = 8\sqrt{3} + 10$ cm.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
7		**3**	
	$V_{\text{seno}} = 8 \cdot 6 \cdot 2 = 96$ (cm^3), $V_{\text{naujo}} = \frac{8}{2} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{2}{2} = 12$ (cm^3).	1	Už pradinio muilo gabalo ir muilo gabalo po 6 dienų tūrių apskaičiavimą.
	$96 - 12 = 84$ (cm^3), $\frac{84}{6} = 14$ cm^3 per dieną.	1	Už per dieną sunaudojamo muilo gabalo tūrio apskaičiavimą.
	$\frac{12}{14} = \frac{6}{7}$ (d.). *Atsakymas.* Muilo užteks $\frac{6}{7}$ dienos.	1	Už teisingą atsakymą.

Taškai	0–4	5–8	9–12	13–16	17–20	21–24	25–28	29–32	33–36	37–40
Balai	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

I gimnazijos klasės matematikos mokymo programos apžvalga

Modeliai ir sąryšiai

Dėsningumai.

Skaičių sekos. Skaičių seka apibrėžiama kaip funkcija, kurios apibrėžimo sritis yra natūraliųjų skaičių aibė $\mathbb{N}$. Paprastais atvejais mokoma(si) skaičių sekas aprašyti n-tojo nario formule, taip pat rekurentiniu būdu. Sprendžiami įvairaus konteksto uždaviniai, kai nagrinėjami, taikomi, derinami įvairūs skaičių sekų apibūdinimo būdai.

Rekomendacijos. Skaičių seka apibrėžiama kaip funkcija, kurios apibrėžimo sritis yra $\mathbb{N}$ ($y = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$), pabrėžiant, kad skaičių sekas įprasta rašyti taip: $a_n = f(n)$. Mokoma(si) skaičių sekas nurodyti n-tojo nario formulėmis, rekurentiškai. Pravartu panagrinėti:

- lyginių natūraliųjų skaičių seką ir jos n-tojo nario formulę $a_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$;
- nelyginių natūraliųjų skaičių seką ir jos n-tojo nario formulę $a_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$;
- sekas, kurių nariai yra tie natūralieji skaičiai, kuriuos dalijant iš natūraliojo skaičiaus m gaunama liekana l ($a_{n+1} = n \cdot m + l$, $n = \{0, 1, 2, \dots\}$);
- Fibonačio skaičių seką $1, 1, 2, 3, 5, \dots$, – šia seka patartina pasinaudoti, aiškinant rekurentinį sekų nurodymo būdą. *Pastaba*. Programoje nurodyta šią seką nagrinėti 10-toje (II gimnazijos) klasėje.

Algebra.

Kvadratinės lygtys. Apibrėžiama antrojo laipsnio (kvadratinė) lygtis su vienu nežinomuoju. Įrodoma ir taikoma kvadratinės lygties sprendinių formulė. Nagrinėjamos diskriminanto reikšmės sąsajos su kvadratinės lygties sprendinių skaičiumi. Sprendžiami įvairaus konteksto uždaviniai, sudarant kvadratines lygtis.

Rekomendacijos. 1. Su nepilnosiomis kvadratinėmis lygtimis mokiniai susipažino 8 klasėje. Jų sprendimas remiasi sandaugos lygios 0 savybės taikymu bei kvadratinės šaknies samprata. 9 (I gimnazijos) klasėje mokomasi spręsti pilnąsias kvadratines lygtis. Reikėtų prisiminti ir pakartoti:

- Sandaugos, lygios 0, savybę: $f(x) \cdot g(x) = \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0; \end{array}\right.$
- kvadratinės šaknies sampratą: $(\sqrt{a})^2 = a$ $(a \geq 0)$. Jei $\sqrt{a} = b$, tai $b^2 = a$ $(b \geq 0, a \geq 0)$;
- pilnojo kvadrato išskyrimą, – prisireiks greitosios daugybos formulių, parašytų atbulai.

2. Rekomenduotina kvadratinės lyties sprendinių formules rašyti atskirai (nenaudoti ženklo $\pm$).

3. Pravartu pateikti Vijeto teoremą.

4. Nerekomenduotina mokyti spręsti nepilnąsias kvadratines lygtis $x^2 = a$, iš abiejų pusių traukiant kvadratinę šaknį.

5. Svarbu, kad mokiniai kvadratines lygtis gebėtų spręsti:
   - algebriškai, nesinaudodami sprendinių formulėmis;
   - naudodamiesi sprendinių formulėmis;
   - grafiškai.

6. Su aukštesniųjų gebėjimų mokiniais galima panagrinėti bikvadratines lygtis.

Raidiniai reiškiniai. Apibrėžiama kvadratinio trinario sąvoka, įrodoma jo skaidymo dauginamaisiais formulė; ji taikoma, sprendžiant uždavinius. Apibrėžiama trupmeninio racionaliojo reiškinio sąvoka, aptariama jo apibrėžimo sritis. Mokoma(si) pritaikyti žinomus sudėties ir daugybos dėsnius, veiksmų su laipsniais ir trupmenomis savybes, pertvarkant, prastinant nesudėtingus trupmeninius racionaliuosius reiškinius.

Rekomendacijos. 1. Mokomasi kvadratinį trinarį išskaidyti tiesiniais dauginamaisiais (įrodyti, kad jis nėra skaidus):

- nesinaudojant formule;
- naudojantis formule.

2. Mokomasi prastinti trupmeninius reiškinius.

Lygčių sistemos. Mokoma(si) dviejų lygčių sistemas (su dviem nežinomaisiais), kurių viena lygtis yra pirmojo, o kita – ne aukštesnio kaip antrojo laipsnio, spręsti grafiniu ir keitimo būdais. Nagrinėjamos įvairios realaus pasaulio situacijos, kurios gali būti modeliuojamos lygčių sistemomis.

Rekomendacijos. 1. Reikėtų prisiminti dviejų tiesinių lyčių su dviem nežinomaisiais sistemų sprendimą (8 klasė):

- keitimo būdu;
- sulyginimo būdu;
- sudėties būdu;
- grafiniu būdu.

2. Mokomasi keitimo būdu spręsti dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas, kurių viena lygtis yra pirmojo laipsnio, kita – antrojo laipsnio.

3. Sistemos sprendinius rekomenduotina mokytis užrašyti dvejaip – nurodant sistemos nežinimuosius ir taškų poromis.

4. Sprendžiant tekstinius ir geometrijos uždavinius, reikia atkreipti dėmesį, kad sudarytosios sistemos sprendiniai nebūtinai tenkina uždavinio sąlygą – tokius sprendinius reikia atmesti.

Tiesiniai ir netiesiniai sąryšiai.

Funkcijos samprata. Apibrėžiamos sąvokos: funkcija, funkcijos argumentas, funkcijos reikšmė, funkcijos apibrėžimo sritis, funkcijos reikšmių sritis, funkcijos grafikas. Mokoma(si) funkciją apibūdinti žodžiais, lentele, grafiku, formule (naudojantis ir skaitmeninėmis priemonėmis), apskaičiuoti ir (ar) nustatyti funkcijos reikšmes, kai yra žinoma funkcijos argumento reikšmė, ir atvirkščiai. Aiškinama(si), kuo funkcijos grafiko eskizas skiriasi nuo grafiko. Mokoma(si) nustatyti funkcijos apibrėžimo sritį, reikšmių sritį, funkcijos grafiko susikirtimo su koordinačių ašimis taškus; intervalus, kuriuose funkcija įgyja teigiamas ir neigiamas reikšmes; yra didėjančioji, mažėjančioji ar pastovioji.

Rekomendacijos. 1. Pateikiant funkcijos sampratą, reikėtų akcentuoti, kad funkciją (dažniausiai funkcijos žymimos $y = f(x)$) galima nurodyti įvairiai:

- kaip vienos aibės (funkcijos apibrėžimo srities – aibės D_f) atvaizdį į kitą aibę (funkcijos reikšmių sritį – aibę E_f) – kiekvienam vienos aibės (D_f) elementui x, naudojantis taisykle (f), priskiriant kitos aibės (E_f) elementą y;
- lentele;
- shema;
- žodžiais;
- formule (nurodant funkcijos reiškinį $f(x)$);
- grafiškai – koordinačių plokštumoje sužymint taškus, kurių koordinatės yra $(x; y) = (x; f(x))$.

2. Mokoma(si) nustatyti funkcijos savybes, naudojantis:

- funkcijos grafiku (grafiko eskizu);
- funkcijos formule.

3. Aiškinant(is) funkcijos grafiko sampratą – funkcijos grafikas yra koordinačių plokštumos taškų, kurių koordinatės yra $(x; y) = (x; f(x))$, visuma – aptariama, kad nubraižyti tikslų funkcijos grafiką dažniausiai nėra įmanoma (dažniausiai braižomas apytikslis funkcijos grafiko vaizdas – funkcijos grafiko eskizas).

4. Sprendžiant su funkcijų savybių nagrinėjimu (nustatymu) susijusius uždavinius, reikėtų atkreipti dėmesį į uždavinius, kuriuose reikia įrodyti, kad funkcija duotame intervale yra didėjančioji (mažėjančioji; pastovioji).

Tiesinė ir kvadratinė funkcijos. Sprendžiami uždaviniai, kai realaus gyvenimo situacijoms tyrinėti ir modeliuoti, eksperimento duomenims aprašyti, taikomos (pasitelkiamos) funkcijos. Išnagrinėjus tiesinės funkcijos modeliu aprašomus eksperimento duomenis, yra apibrėžiama tiesinė funkcija $y = kx + b$, tiesės krypties koeficientas k, postūmio koeficientas b. Braižant konkrečių tiesinių funkcijų grafikų eskizus (tieses), tyrinėjama, kaip tiesės padėtis priklauso nuo šių koeficientų reikšmių. Išnagrinėjus kvadratine funkcija aprašomus eksperimento duomenis, įvedama kvadratinės funkcijos $y = ax^2 + bx + c$, kai $a \neq 0$, sąvoka, braižomi jos grafiko (parabolės) eskizai. Tyrinėjama, kaip parabolės forma ir padėtis priklauso nuo a ir $D = b^2 - 4ac$ reikšmių. Naudojantis skaitmeninėmis priemonėmis, tyrinėjama, kaip, taikant transformacijas, iš funkcijos $y = x$ grafiko gauti funkcijos $y = kx + b$ grafiką, o iš funkcijos $y = x^2$ grafiko gauti funkcijos $y = a(x - m)^2 + n$ grafiką. Sprendžiami uždaviniai, kuriuose įvairios realaus pasaulio situacijos yra modeliuojamos funkcijomis: $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = a(x - m)^2 + n$, $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Rekomendacijos. 1. Nagrinėjant tiesinę funkciją $y = f(x) = kx + b$, reikia pabrėžti, kad formule $y = kx + b$ nusakomos visos koordinačių plokštumos tiesės (lygtis $y = kx + b$ $(k, b \in \mathbb{R})$ vadinama kryptine tiesės lygtimi), kurios nėra statmenos abscisių ašiai, o visos koordinačių plokštumos tiesės (įskaitant ir tieses, statmenas abscisių ašiai) nusakomos bendrąja tiesės lygtimi $ax + by + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$.

2. Nagrinėjant kvadratinę funkciją $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, galima laikytis tokio eiliškumo:

1) pradedame nuo $y = x^2$;
2) tada – pora transformacijų: $y = ax^2$, $y = x^2 + c$ bei $y = ax^2 + c$;
3) trečioji transformacija: $y = (x + d)^2$, pridedant $y = a(x + d)^2 + c$;
4) iš $y = ax^2 + bx + c$ išskiriamas dvinario kvadratas – taip įrodant, kad kvadratinių funkcijų $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ grafikų forma yra tokia kaip $y = g(x) = ax^2$;
5) pravartu atskirai panagrinėti kvadratines funkcijas, kurių laisvasis narys lygus nuliui: $y = h(x) = ax^2 + bx$;
6) vertėtų paraboles patyrinėti naudojantis skaitmeninėmis priemonėmis.

Geometrija ir matavimai

Figūros.

Plokštumos figūros. Apibrėžiami centrinis ir įbrėžtinis kampai. Nagrinėjama centrinio ir įbrėžtinio kampo, kurie kerta tą patį lanką, savybė. Apibrėžiamos sąvokos: apskritimo liestinė, kirstinė, styga; skritulio išpjova, nuopjova. Paaiškinama, kad apskritimo lankas matuojamas ne tik ilgio matavimo vienetais, bet ir laipsniais. Aptariamos ir taikomos savybės: liestinės statmenumo spinduliui, susikertančiųjų liestinių atkarpų iki lietimosi su apskritimu taškų, susikertančiųjų stygų. Mokoma(si) remtis apibrėžimais ir įrodytais teiginiais, sprendžiant įvairius matematinio ir realaus konteksto uždavinius, įrodinėjant kitus teiginius.

Rekomendacijos. 1. Šios temos tematiką trumpai nusakyti galima taip:

- apskritimas ir tiesė;
- apskritimas ir kampas.

2. Pradėti reikėtų nuo apskritimo ir tiesės tarpusavio padėčių nagrinėjimo (apskritimas ir tiesė neturi bendrų taškų; turi vienintelį bendrą tašką; turi du bendrus taškus).

3. Pravartu su aukštesnių gebėjimų mokiniais neapsiriboti programoje surašytais teiginiais, jiems patartina pateikti liestinės ir kirstinės savybę.

4. Kalbant apie apskritimo ir kampo tarpusavio padėtis, reikėtų išskirti tris atvejus: apibrėžtinis apie apskrtimą kampas, įbrėžtinis į apskritimą kampas ir centrinis kampas.

5. Rekomenduotina atskirai panagrinėti įbrėžtinį kampą, kuris remiasi į skersmenį.

6. Reikėtų panagrinėti PUPP formulių rinkinyje pateiktų skritulio išpjovos lanko ilgio ir ploto formules:

$C_\alpha = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha$, $S_\alpha = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha$ – jų išvaizda grėsminga, o prasmė yra nesunkiai suvokiama.

7. Be abejo, rekomenduotina nepamiršti apskritimo ilgio ir skritulio ploto formulių, skaičiaus „Pi“.

Įvadas į trigonometriją. Apibrėžiami sinusas, kosinusas ir tangentas stačiajame trikampyje. Apskaičiuojant panašiųjų trikampių atitinkamų kraštinių ilgių santykius, įsitikinama, kad jų reikšmės nepriklauso nuo trikampio dydžio. Įrodomos lygybės $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ ir sudaroma kampų 30°, 45°, 60° trigonometrinių reikšmių lentelė. Mokoma(si) naudotis skaičiuotuvu, apskaičiuojant apytiksles smailiojo kampo sinuso, kosinuso, tangento reikšmes. Sprendžiami įvairūs uždaviniai, kai taikomi sinuso, kosinuso, tangento stačiajame trikampyje apibrėžimai (pavyzdžiui, nustatyti objekto aukštį, rasti kelio nuolydį ar lėktuvo pakilimo kampą, apskaičiuoti atstumą iki neprieinamos vietos ir pan.).

Rekomendacijos. 1. Prieš pradedant nagrinėti šią temą (arba ją nagrinėjant), būtina prisiminti figūrų panašumo sampratą bei su trikampių panašumu susijusius klausimus.

2. Taip pat reikia prisiminti su stačiuoju trikampiu susijusią tematiką:

- Pitagoro teoremą;
- statinio, esančio prieš 30° kampą, savybę;
- statųjį lygiašonį trikampį;
- faktus, susijusius su stačiojo trikampio aukštine, nubrėžta į įžambinę.

3. Svarbiausia, kad mokiniai suvoktų, kad užrašai $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\operatorname{tg}(\alpha)$ reiškia skaičius.

4. Rekomenduotina įrodyti, kad $\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$, $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$.

5. Visa kita – kaip nurodyta programoje.

Duomenys ir tikimybės

Duomenys ir jų interpretavimas.

Nagrinėjamos taškinės (sklaidos) diagramos, vaizduojančios statistinį ryšį tarp dviejų kintamųjų (stebimų požymių) reikšmių. Mokoma(si) iš sklaidos diagramos įvertinti šio ryšio buvimą ar nebuvimą, aptariama, kokiais atvejais kalbama apie kintamųjų koreliacinį ryšį. Detaliau aptariama tiesinė koreliacija. Mokoma(si) užrašyti sklaidos diagramoje pavaizduotos tiesės lygtį $y = kx + b$, interpretuoti šia lygtimi aprašomą duomenų ryšį. Aptariama, kodėl negalima daryti išvados apie tiesinės priklausomybės egzistavimą populiacijoje, jei duomenys imtyje yra neatsitiktiniai ar jų yra per mažai.

Rekomendacijos. 1. *Klausimas*: Kiek šioje temoje yra grynosios matematikos? *Atsakymas*: tiek, kiek ši tema susijusi su kryptine tiesės lygtimi $y = kx + b$.

2. Svarbu mokinius išmokyti parašyti lygtį tiesės, kai žinomos dviejų tai tiesei priklausančių taškų koordinatės bei teisingai interpretuoti koeficiento k prasmę.

II gimnazijos klasė

II gimnazijos klasės matematikos mokymo turinio nuoseklaus išdėstymo pavyzdys 2024/2025 m. m.

37 mokslo metų savaitės × **4** pamokos per savaitę = **148** pamokos per mokslo metus:
30 savaičių × **4** pamokos per savaitę = **120** pamokų – mokymo turinio įsisavinimas,
3 savaitės × **4** pamokos per savaitę = **12** pamokų – rengimasis PUPP,
4 savaitės × **4** pamokos per savaitę = **16** pamokų – rezervinės pamokos.

1. Trupmeninės racionaliosios lygtys (16 pamokų)
- 1.1. Trupmeninės racionaliosios lygties samprata (4 pamokos)
- 1.2. Trupmeninių racionaliųjų lygčių algebrinis sprendimas (4 pamokos)
- 1.3. Judėjimo uždaviniai (4 pamokos)
- 1.4. Darbo uždaviniai (4 pamokos)

2. Lygčių sistemos (12 pamokų)
- 2.1. Lygčių sistemų sprendimo būdai (4 pamokos)
- 2.2. Lygčių sistemos, kurių viena lygtis yra tiesinė, kita – kvadratinė (4 pamokos)
- 2.3. Lygčių sistemos, kurių viena lygtis yra tiesinė, kita – racionalioji (4 pamokos)

3. Kvadratinės nelygybės (16 pamokų)
- 3.1. Kvadratinės nelygybės samprata (4 pamokos)
- 3.2. Kvadratinės nelygybės algebrinis sprendimas (8 pamokos)
- 3.3. Kvadratinės nelygybės grafinis sprendimas (4 pamokos)

4. Trigonometrija (20 pamokų)
- 4.1. Vienetinio apskritimo ir posūkio kampo sampratos (4 pamokos)
- 4.2. Bukojo kampo sinusas, kosinusas ir tangentas (4 pamokos)
- 4.3. Trikampio ploto trigonometrinė formulė (4 pamokos)
- 4.4. Sinusų teorema (4 pamokos)
- 4.5. Kosinusų teorema (4 pamokos)

5. Trikampiai (12 pamokų)
- 5.1. Trikampio pusiaukampinės ir įbrėžtinis apskritimas (4 pamokos)
- 5.2. Trikampio kraštinių vidurio statmenys ir apibrėžtinis apskritimas (4 pamokos)
- 5.3. Trikampio pusiaukraštinės (4 pamokos)

6. Keturkampiai ir daugiakampiai (16 pamokų)
- 6.1. Įbrėžtinis į apskritimą keturkampis (4 pamokos)
- 6.2. Apibrėžtinis apie apskritimą keturkampis (4 pamokos)
- 6.3. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai (4 pamokos)
- 6.4. Panašiųjų figūrų savybės (4 pamokos)

7. Rengimasis pagrindinio ugdymo II dalies pasiekimų patikrinimui (12 pamokų)

8. Kombinatorika ir tikimybės (16 pamokų)
- 8.1. Kombinatorikos sudėties ir daugybos taisyklės (4 pamokos)
- 8.2. Rinkiniai, kuriuose elementų tvarka yra svarbi, nėra svarbi (4 pamokos)
- 8.3. Santykinis dažnis ir klasikinė tikimybė (8 pamokos)

9. Duomenys ir jų interpretavimas (12 pamokų)
- 9.1. Dispersija ir standartinis nuokrypis (4 pamokos)
- 9.2. Skirstiniai (4 pamokos)
- 9.3. Duomenų skaitinės charakteristikos (4 pamokos)

II gimnazijos klasės matematikos mokymo programos apžvalga

Modeliai ir sąryšiai

Dėsningumai.

Nagrinėjamos probleminės situacijos, kuomet nustatomas matematinės informacijos trūkumas ir mokoma(si) ją susirasti, atsirinkti. Sprendžiami uždaviniai, į kuriuos atsakyti galima nevienareikšmiai, kurie turi daugiau negu vieną teisingą atsakymą. Praktikuojamasi sugalvoti naujus klausimus (sąlygą, uždavinį), nustatyti naujo uždavinio ryšį su anksčiau spręstuoju. Sprendžiami uždaviniai, kai skaičius, dydis padalijamas į dvi nelygias dalis, kuriuos sprendžiant reikia remtis proporcingąja dalyba. Nagrinėjama Fibonačio skaičių seka, aukso pjūvio skaičius $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, aukso pjūvio seka (0,056; 0,090; 0,146; 0,236; …). Sprendžiami su procentais ir dydžių santykiais susiję uždaviniai: džiovinimo ir drėkinimo; sudėtinių procentų; lydinių, mišinių, tirpalų.

Rekomendacijos. 1. Nagrinėjant atkarpos dalijimo į dvi nelygias dalis, kurių viena yra „ne per daug didelė“, klausiant: „Kokį skaičių kartų viena dalis turi būti didesnė už kitą dalį“, galima gauti įvairias lygtis. Patartina atkarpos mažesniosios dalies ilgį pažymėti 1, o didesniosios – x. Tada gaunama nesudėtinga trupmeninė racionalioji lygtis $\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1}$, kurios teigiamasis sprendinys yra $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61\ldots$ (jis pavadintas aukso pjūvio skaičiumi). Su aukštesniųjų gebėjimų mokiniais, galima panarinėti lygtį, kuri gaunama didesniąją atkarpos dalį pasižymint d, o mažesniąją – m. Tada gaunama lygtis $\frac{d+m}{d} = \frac{d}{m}$, $1 + \frac{m}{d} = \frac{d}{m}$, iš kurios gauname, kad $\frac{d}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Nagrinėjant rekurentiškai nusakomą Fibonačio skaičių seką 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., pravartu pastebėti, kad dviejų gretimų jos narių $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ santykis vis artėja prie aukso pjūvio reikšmės, kai n tolsta link begalybės.

3. Sprendžiant džiovinimo (drėkinimo) uždavinius, patartina panagrinėti situaciją, kai „objekto“ drėgnumui sumažėjus nuo 99 % iki 98 % jo masė sumažėja dvigubai. Svarbiausia čia, kad mokiniai suprastų, kad džiovinant ar drėkinant „objektą“ sudarančių sausųjų medžiagų kiekis nekinta.

4. Sprendžiant procentų uždavinius, svarbiausia, kad mokiniai suprastų, nuo kurio dydžio yra skaičiuojami procentai (kuris dydis atitinka 100 %). Galima būtų rekomenduoti rašyti, pavyzdžiui, taip: $100\ \%\ (a) = \frac{a}{100}$. Taip pat labai svarbu gebėti „procentus“ keisti „kartais“. Pavyzdžiui, jei kaina a du kartus buvo sumažinta 20-čia procentų, tai galutinė jos kaina lygi $a \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}80 = a \cdot 0{,}8^2 = 0{,}64a$.

5. Kalbant apie lydinius, mišinius ir tirpalus, svarbu, kad mokiniai suprastų, ką parodo dydžių a ir b santykis $a : b$. Pavyzdžiui, jei lydinys susideda iš dviejų dalių a ir b, kurių masių ar tūrių santykis lygus $a : b = 1 : 2$, tai $a = \frac{1}{2}b$, $b = 2a$.

Algebra.

Trupmeninės racionaliosios lygtys. Apibrėžiama trupmeninės racionaliosios lygties sąvoka. Mokoma(si) spręsti trupmenines racionaliąsias lygtis, joms suteikiant pavidalą $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$. Nagrinėjamos įvairios realaus pasaulio ir matematinės situacijos, kurios gali būti modeliuojamos racionaliosiomis lygtimis.

Rekomendacijos. 1. Nagrinėjant trupmenines racionaliąsias lygtis svarbu yra:

- nustatyti jų apibrėžimo sritį;
- gebėti lygčiai suteikti pavidalą $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$;
- pasinaudojant trupmenos, lygios nuliui, savybe rasti lygties sprendinius;
- atsižvelgus į lygties apibrėžimo sritį bei uždavinio sąlygą, parašyti atsakymą.

2. Be abejo, galima trupmenines racionaliąsias lygtis mokyti spręsti abi lygties puses dauginant iš į lygtį įeinančių trupmenų bendrojo vardiklio. Šiuo atveju svarbu atsižvelgti į tai, kad tokia daugyba galima tik, kai dauginamieji nelygūs 0.

Kvadratinės nelygybės. Apibrėžiama kvadratinės nelygybės sąvoka. Mokoma(si) kvadratines nelygybes spręsti algebriniu, t. y. kai pradinė kvadratinė nelygybė keičiama dviejų pirmojo laipsnio nelygybių sistemomis, ir grafiniu būdais. Diskutuojama apie algebrinio ir grafinio būdo taikymo ypatumus, kai šie būdai pasitelkiami kvadratinės funkcijos įvairioms savybėms nagrinėti.

Rekomendacijos. 1. Prieš sprendžiant kvadratines nelygybes, pravartu prisiminti kvadratinių lygčių sprendimo idėją:

- lygčiai suteikiame pavidalą $ax^2 + bx + c = 0$,
- kairiąją lygties pusę išskaidome tiesiniais dauginamaisiais (jei tai įmanoma),
- pasinaudoję sandaugos, lygios 0 savybe, randame lygties sprendinius.

2. Kvadratines nelygybes reikia išmokyti spręsti algebriškai – nelygybę $ax^2 + bx + c \lesseqqgtr 0$ keičiant dviejų nelygybių sistemų visuma, bei grafiškai – naudojantis parabolės $y = ax^2 + bx + c$ eskizu.

Lygčių sistemos. Nagrinėjamos lygčių sistemos (su dviem nežinomaisiais), kurių viena lygtis tiesinė, o kita tiesinė, kvadratinė ar trupmeninė racionalioji. Mokoma(si) įvairaus konteksto situacijas modeliuoti lygčių sistemomis.

Rekomendacijos. 1. Ankstesnėse klasėse buvo mokoma spręsti dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sitemas, kurių abi lygtys yra pirmojo laipsnio bei sistemas, kurių viena lygtis yra pirmojo laipsnio, o kita – antrojo laipsnio. 10-toje (II gimnazijos) klasėje nagrinėjamos sistemos, kurių viena lygtis yra pirmojo laipsnio, o kita – trupmeninė racionalioji.

2. Lygčių sistemos, kurių viena lygtis yra pirmojo laipsnio, o kita – trupmeninė racionalioji, sprendžiamos keitimo būdu.

Geometrija ir matavimai

Figūros.

<u>*Plokštumos figūros*</u>. Nagrinėjant panašiųjų figūrų perimetrus, plotus, nustatomi dėsningumai, jie pagrindžiami ir taikomi, sprendžiant uždavinius. Tyrinėjamos ir pagrindžiamos trikampio pusiaukampinių, pusiaukraštinių savybės. Apibrėžiamos sąvokos: įbrėžtinis daugiakampis, apibrėžtinis daugiakampis. Suformuluojami ir pagrindžiami teiginiai apie į trikampį įbrėžto apskritimo ir apie trikampį apibrėžto apskritimo centrus. Mokoma(si) taikyti formules $S = rp$, $S = \frac{abc}{4R}$. Mokoma(si) pagrįsti ir taikyti įbrėžtinio ir apibrėžtinio keturkampio savybes. Mokoma(si) remtis apibrėžimais ir įrodytais teiginiais, sprendžiant įvairius matematinio ir realaus konteksto uždavinius, įrodinėjant kitus teiginius.

Rekomendacijos. 1. Reikia priminti mokiniams, kokios figūros vadinamos panašiomis, pagrįsti teiginius:

- panašių figūrų perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui;
- panašių figūrų plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui;
- aukštesniųjų gebėjimų mokiniams galima pagrįsti teiginį, kad panašių erdvinių kūnų tūrių santykis lygus panašumo koeficiento kubui.

2. Nagrinėjamos trikampio pusiaukampinių savybės:

- trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške, tas taškas yra įbrėžtinio į trikampį apskritimo centras;
- trikampio pusiaukampinė padalija trikampio kraštinę į atkarpas, kurių ilgiai yra proporcingi greta jų esančių trikampio kraštinių ilgiams.

3. Nagrinėjamos trikampio pusiaukraštinių savybės:

- trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške, tas taškas kiekvieną pusiaukraštinę padalija į atkarpas, kurių viena (einanti nuo trikampio viršūnės) yra dvigubai ilgesnė už kitą;
- trikampio pusiaukraštinė padalija trikampį į du lygiapločius trikampius;
- aukštesniųjų gebėjimų mokiniams galima pagrįsti teiginį, kad trikampio pusiaukraštinės sudalija trikampį į 6 lygiapločius trikampius.

4. Pravartu panagrinėti trikampio kraštinių vidurio statmenis – įrodyti, kad jie susikerta viename taške ir tas taškas yra vienodai nutolęs nuo trikampio viršūnių (jis yra apibrėžtinio apskritimo centras).

5. Pravartu įrodyti įbrėžtinio į trikampį apskritimo spindulio ilgį, pusperimetrį ir trikampio plotą siejančią lygybę $S = rp$, o lygybę $S = \frac{abc}{4R}$ galima pateikti be įrodymo.

6. Nagrinėjant įbrėžtinį keturkampį:

- pateikiamas įbrėžtinio keturkampio apibrėžimas;
- įrodoma įbrėžtinio keturkampio savybė: „Jei keturkampis yra įbrėžtinis, tai jo priešingų kampų sumos yra lygios 180°“;
- įrodomas įbrėžtinio keturkampio požymis: „Jei keturkampio dviejų priešingų kampų suma yra lygi 180°, tai apie tą keturkampį galima apibrėžti apskritimą“.

7. Nagrinėjant apibrėžtinį keturkampį:

- pateikiamas apibrėžtinio keturkampio apibrėžimas;
- įrodoma apibrėžtinio keturkampio savybė: „Jei keturkampis yra apibrėžtinis, tai jo priešingų kraštinių sumos yra lygios“;
- įrodomas apibrėžtinio keturkampio požymis: „Jei iškilojo keturkampio priešingų kraštinių sumos yra lygios, tai į tą keturkampį galima įbrėžti apskritimą“.

Įvadas į trigonometriją. Apibrėžiamas vienetinis apskritimas ir posūkio kampas, posūkio kampo sinusas, kosinusas, tangentas, kai $\alpha \in (0°; 180°)$. Išsiaiškinama, kaip apskaičiuojamos 120°, 135°, 150° kampų sinuso ir kosinuso reikšmės. Apibendrinama, kaip apskaičiuojamos bet kokio smailiojo ar bukojo kampo sinuso, kosinuso reikšmės ir įrodomos formulės: $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$. Įrodoma trikampio ploto formulė $S = \frac{1}{2}ab\sin(\angle C)$, kosinusų teorema, sinusų teorema, mokoma(si) jas taikyti nežinomiems trikampio elementams rasti. Pagrindžiamas sinusų teoremos ir apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgio sąryšis. Praktikuojamasi taikyti šias teoremas, sprendžiant trikampių uždavinius.

Rekomendacijos. 1. Apibrėžiamas vienetinis apskritimas – tai apskritimas, kurio centras yra koordinačių pradžios taškas $(0; 0)$, o spindulio ilgis lygus 1. Patartina įrodyti vienetinio apskritimo lygtį.

2. Apibrėžiamas posūkio kampas – tai kampas, gaunamas sukant spindulį OX apie tašką O (kampai, gaunami spindulį sukant prieš laikrodžio rodyklės judėjimo kryptį, laikomi teigiamais, o pagal laikrodžio rodyklės judėjimo kryptį – neigiamais).

3. Apibrėžiami posūkio kampo $\alpha \in (0°; 180°)$ sinusas ir kosinusas. Galima nepraleisti ir kampų 0° bei $180°$ sinuso ir kosinuso.

4. Apibrėžiamas posūkio kampo tangentas (kaip tų kampų sinuso ir kosinuso santykis).

5. Pakartojama, kam lygios $30°$, $45°$, $60°$ kampų sinuso, kosinuso ir tangento reikšmės.

6. Įsitikinama, kad $\sin(90°) = 1$, $\cos(90°) = 0$, $\operatorname{tg}(90°)$ neturi prasmės.

7. Įrodomos formulės $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$. Pravartu įrodyti ir formules $\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$, $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$.

8. Apskaičiuojamos kampų $120°$, $135°$, $150°$ sinuso, kosinuso ir tangento reikšmės.

9. Įrodoma:
- trikampio ploto trigonometrinė formulė;
- sinusų teorema;
- kosinusų teorema;
- sinusų teoremos ir apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgio sąryšis.

Duomenys ir tikimybės

Pastaba. Į PUPP šios srities tematika neįtraukta.

Duomenys ir jų interpretavimas.

Paaiškinama, kaip imties iš populiacijos sudarymas susijęs su pagrįstų išvadų darymu, ką vadiname duomenų rinkinių kintamumu, duomenų pasiskirstymu, kaip galima apibūdinti ir kiekybiškai interpretuoti duomenų rinkinius. Aptariamos sąvokos: dispersija, standartinis nuokrypis, skirstinys, normalusis skirstinys, simetriškasis skirstinys, asimetriškasis skirstinys. Nagrinėjant realaus gyvenimo konteksto pavyzdžius, diskutuojama apie duomenų rinkimą ir analizavimą. Svarstoma, kokias išvadas apie duomenis leidžia daryti jų pasiskirstymą aproksimuojančios kreivės forma ar apskaičiuotos duomenų centro (pavyzdžiui, vidurkio) ir sklaidos (pavyzdžiui, standartinio nuokrypio, kvartilių) charakteristikos. Analizuojamas statistinis patikimumas.

Rekomendacijos. statistinio-rastingumo-ugdymas-9-12-kl-mokytojams.pdf (emokykla.lt)

Tikimybės ir jų interpretavimas.

Aptariama, kas yra kelių elementų rinkinys, kaip užrašoma tokių rinkinių aibė. Mokoma(si) sudaryti rinkinius, kai elementai imami iš tos pačios aibės ar skirtingų aibių. Nagrinėjami pavyzdžiai, kai elementų tvarka rinkinyje svarbi ir kai nesvarbi. Aiškinama(si), kaip apskaičiuoti rinkinių skaičių, atsižvelgiant į elementų tvarkos rinkinyje svarbą. Aptariama, kada, skaičiuojant rinkinių skaičių, patogu naudotis kombinatorikos sudėties ir daugybos taisyklėmis. Rinkinių sudarymo įgūdžiai taikomi, sprendžiant tikimybių uždavinius. Mokoma(si) įvertinti atsitiktinio įvykio tikimybę, renkant duomenis apie atsitiktinį procesą ir stebint jo ilgalaikį santykinį dažnį bei gautą rezultatą palyginant su teorine šio įvykio tikimybe (pavyzdžiui, šešiasienio kauliuko ridenimas iki 600 kartų ir kauliuko atvirtimo šešiomis akutėmis stebėjimas).

Rekomendacijos. 1. *Kombinatorikos arba „Kiek kokių rinkinių yra?“ teorija*. Skaičiuojant rinkinių skaičių:

- naudojamasi kombinatorine sudėties taisykle,
- naudojamasi kombinatorine daugybos taisykle,
- naudojamasi galimybių medžiu,
- naudojamasi galimybių lentele,
- nesinaudojama kėlinių, gretinių ir derinių formulėmis.

Pastaba. Kombinatorinės sudėties ir daugybos taisyklės pagrindžiamos pavyzdžiais.

2. *Kombinatorikos uždaviniai*. Sprendžiami uždaviniai, kai rinkiniai sudaromi:

1) rinkinio elementus imant iš vienos aibės,
2) rinkinio elementus imant iš dviejų ar daugiau aibių,
3) žinant, kad elementų tvarka rinkinyje yra svarbi,
4) žinant, kad elementų tvarka rinkinyje nėra svarbi.

Pastaba. Svarbu, kad mokiniai suvoktų, kuo nagrinėjami rinkiniai skiriasi.

3. Kombinatorikos uždavinių pavyzdžiai.

1. Yra m mokinių: k kairiarankių ir d dešiniarankių. Keliais būdais galima pasirinkti:

a) vieną mokinį; b) du mokinius;

kai renkamasi iš kairiarankių; dešiniarankių; visų mokinių; vienas mokinys turi būti kairiarankis, kitas – dešiniarankis?

2. Metamos dvi monetos. Stebima kuria puse į viršų atvirto kiekviena moneta. Surašykite visas galimas šio bandymo baigtis.

3. Metami du standartiniai žaidimo kauliukai. Stebima, kuria puse atvirto kiekvienas kauliukas.

a) Kiek baigčių turi šis bandymas?

b) Kiek yra baigčių, palankių įvykiui A – „Abu kauliukai atvirto vienodu skaičiumi akučių“?

4. *Tikimybės*. Klasikinės tikimybės sąvoka buvo nagrinėta 6 klasėje (7, 8 ir 9 klasėje tikimybių tematika į BP neįeina).

5. Patartina viską pradėti iš pradžių:

- nagrinėjamas klasikinis tikimybinis bandymas ir skaičiuojamas jo baigties santykinis dažnis (statistinė tikimybė);
- pateikiama klasikinės matematinės tikimybės samprata;
- sprendžiami tikimybių uždaviniai, susiję su nagrinėtais kombinatorikos uždaviniais.

PUPP formulių rinkinys (projektas, pataisytas pagal mokytojų pastabas ir pasiūlymus)

1. Sudėtinių procentų formulė:

$S_n = S_0 \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n$; čia S_0 – dydžio S pradinė reikšmė, p – procentų skaičius, n – kartų skaičius.

2. Kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ sprendinių formulės:

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$; čia $D = b^2 - 4ac$.

3. Kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ skaidymo tiesiniais dauginamaisiais formulė:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$; čia x_1, x_2 – kvadratinio trinario šaknys.

4. Trigonometrinės formulės:

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$,

$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

5. Trigonometrinių reikšmių lentelė:

$\alpha =$	$30°$	$45°$	$60°$	$120°$	$135°$	$150°$
$\sin(\alpha) =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos(\alpha) =$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\mathrm{tg}(\alpha) =$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. Sinusų teorema ir jos išvada:

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} = 2R;$$

čia a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – trikampio kampų, esančių prieš kraštines a, b, c, didumai, R – apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgis.

7. Kosinusų teorema:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\angle A);$$

čia a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, $\angle A$ – trikampio kampo, esančio tarp kraštinių b ir c, didumas.

8. Trikampio ploto formulės:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin(\angle C) = rp = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

čia a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, $p = \frac{a+b+c}{2}$, $\angle C$ – trikampio kampo, esančio tarp kraštinių a ir b, didumas, r – į trikampį įbrėžto apskritimo spindulio ilgis, R – apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgis.

9. Skritulio išpjovos lanko ilgio formulė:

$C_\alpha = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha$; čia r – skritulio spindulio ilgis, α – išpjovos kampo didumas (laipsnių skaičiumi).

10. Skritulio išpjovos ploto formulė:

$S_\alpha = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha$; čia r – skritulio spindulio ilgis, α – išpjovos kampo didumas (laipsnių skaičiumi).