2024 m. rugsėjo mėn. konsultacijų III–IV gimnazijos klasių bendrojo kurso matematikos mokytojams santrauka

NŠA

2024-09-25

Turinys

1. III gimnazijos klasės matematikos dalyko bendrojo kurso mokymo turinio nuoseklaus išdėstymo pavyzdys 2024/2025 m. m. 3

2. III gimnazijos klasės bendrojo kurso mokymo turinio apžvalga 5

3. IV gimnazijos klasės matematikos dalyko bendrojo kurso mokymo turinio nuoseklaus išdėstymo pavyzdys 2024/2025 m. m. 21

4. IV gimnazijos klasės bendrojo kurso mokymo turinio apžvalga 22

5. Turinio sričių, pasiekimų sričių ir užduoties taškų pasiskirstymas procentais VBE užduotyse 31

6. VBE užduočių specifikacijos santrauka 32

7. Matematikos VBE bendrojo kurso formulių rinkinys (projektas) 33

III gimnazijos klasės matematikos dalyko bendrojo kurso mokymo turinio nuoseklaus išdėstymo pavyzdys 2024/2025 m. m.

34 savaitės × **4** pamokos per savaitę = **136** pamokos per mokslo metus:
30 savaičių × **4** pamokos per savaitę = **120** pamokų – mokymo turinio įsisavinimas,
2 savaitės × **4** pamokos per savaitę = **8** pamokos – pagrindinės mokyklos kurso kartojimas,
2 savaitės × **4** pamokos per savaitę = **8** pamokos – rengimasis I dalies VBE.

1. Pagrindinės mokyklos matematikos kurso kartojimas. Diagnostinis darbas (8 pamokos)

2. Laipsniai, šaknys ir logaritmai (20 pamokų)
- 2.1. Skaičių aibės. Veiksmai su skaičių aibėmis (4 pamokos)
- 2.2. Realiojo skaičiaus modulis (4 pamokos)
- 2.3. Laipsniai (4 pamokos)
- 2.4. Šaknys (4 pamokos)
- 2.5. Logaritmai (4 pamokos)

3. Sinusas, kosinusas ir tangentas (16 pamokų)
- 3.1. Posūkių kampai. Vienetinis apskritimas (4 pamokos)
- 3.2. Posūkio kampo sinusas ir kosinusas. Arksinusas ir arkkosinusas (8 pamokos)
- 3.3. Posūkio kampo tangentas. Tangentų tiesė. Arktangentas (4 pamokos)

4. Progresijos (16 pamokų)
- 4.1. Aritmetinė progresija (8 pamokos)
- 4.2. Geometrinė progresija (8 pamokos)

5. Laipsninės, šaknies, rodiklinės, logaritminės ir trigonometrinės funkcijos (24 pamokos)
- 5.1. Funkcijos ir jos grafiko samprata. Funkcijų savybės (4 pamokos)
- 5.2. Laipsninės funkcijos (4 pamokos)
- 5.3. Šaknies funkcijos (4 pamokos)
- 5.4. Rodiklinės funkcijos (4 pamokos)
- 5.5. Logaritminės funkcijos (4 pamokos)
- 5.6. Trigonometrinės funkcijos (4 pamokos)

6. Lygtys (24 pamokos)

6.1. Racionaliosios lygtys (4 pamokos)
6.2. Iracionaliosios lygtys (4 pamokos)
6.3. Rodiklinės lygtys (4 pamokos)
6.4. Logaritminės lygtys (4 pamokos)
6.5. Lygčių sistemos. Tekstiniai uždaviniai (8 pamokos)

7. Nelygybės (20 pamokų)

7.1. Racionaliosios nelygybės (4 pamokos)
7.2. Rodiklinės nelygybės (8 pamokos)
7.3. Logaritminės nelygybės (8 pamokos)

8. Rengimasis I dalies valstybiniam brandos egzaminui (8 pamokos)

III gimnazijos klasės bendrojo kurso mokymo turinio apžvalga

Skaičiai ir skaičiavimai

Skaičių aibės.

Nagrinėjama realiųjų skaičių aibės struktūra. Apibrėžiama aibių sąjunga, sankirta ir skirtumas. Atliekami veiksmai su aibėmis. Praktikuojamasi veiksmus su aibėmis vaizduoti Veno diagramomis.

Rekomendacijos.

Teorija. 1. Formalizuojamos ir apibendrinamos anksčiau įgytos žinios apie realiųjų skaičių aibės struktūrą, mokoma(si) rasti ir užrašyti skaičių aibių ir intervalų sąjungą, sankirtą bei skirtumą. Aiškinant aibių sąjungą, sankirtą ir skirtumą bei aibės poaibio sąvoką naudojamasi Veno diagramomis.

2. Pravartu pabrėžti, kad spręsdami lygčių (nelygybių) sistemą, ieškome į sistemą įeinančių lygčių (nelygybių) sprendinių aibių sankirtos.

3. Galima pratinti mokinius, nurodant lygčių (nelygybių) sprendinius, naudotis aibių sąjungos ženklu.

4. Natūraliųjų, sveikųjų, racionaliųjų, iracionaliųjų ir realiųjų skaičių aibių tarpusavio ryšius gebėti apibūdinti naudojantis aibių teorijos simboliais ir žymenimis ($\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\subset$, $\in$, $\notin$).

Uždaviniai. 1. Būtina spręsti uždavinius, kuriuos patogu spręsti naudojantis Veno diagramomis.

2. Pravartu prisiminti procento sąvoką ir išspręsti keletą su jų taikymu realiame gyvenime susijusių uždavinių.

3. Pravartu prisiminti su santykiais (su proporcijomis) susijusius uždavinius. Svarbu, kad mokiniai teisingai suprastų dydžių santykių prasmę, pavyzdžiui, jei $a : b = 2 : 3$, tai $\frac{a}{b} = \frac{2}{3} = \frac{2x}{3x}$, $a = \frac{2}{3}b$, $b = \frac{3}{2}a$.

Realiojo skaičiaus modulis.

Realiojo skaičiaus modulis. Apibrėžiama realiojo skaičiaus modulio sąvoka, paaiškinama jo geometrinė prasmė. Pavyzdžiais pagrindžiamos modulio savybės: $|-a| = |a|$, $|a|^2 = a^2$, $|a - b| = |b - a|$. Mokoma(si) apskaičiuoti skaitinių reiškinių su moduliais reikšmes, traukti kvadratinę šaknį iš antrojo laipsnio: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Rekomendacijos.

Teorija. 1. Įvedama realiojo skaičiaus modulio sąvoka ir žymėjimas:

$$|a| = \left[\begin{array}{l} a, \text{kai } a > 0; \\ 0, \text{kai } a = 0; \\ -a, \text{kai } a < 0. \end{array}\right.$$

Pastaba. Čia nevartotinas riestinis skliaustas „{“, nes jis reiškia „sankirtą“, o tinkamas ženklas „[“ atitinka „sąjungą“.

2. Pateikiamos ir pavyzdžiais paaiškinamos programoje nurodytos formulės $|-a| = |a|$, $|a|^2 = a^2$, $|a - b| = |b - a|$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Uždaviniai. 1. Mokoma(si) apskaičiuoti skaitinių reiškinių su moduliais reikšmes.

2. Sprendžiami uždaviniai susiję su formulės taikymu $\sqrt{a^2} = |a|$. Pravartu parodyti mokiniams, kaip naudojantis šia lygybe galima spręsti nepilnąją kvadratinę lygtį $x^2 = a$, $a \geq 0$.

Laipsniai.

Aiškinama(si) laipsnio su racionaliuoju rodikliu $a^{\frac{m}{n}}$ ($a > 0, a \neq 1, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n > 1$) samprata, įsitikinama laipsnį su racionaliuoju rodikliu ir šaknį siejančios lygybės $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ teisingumu (keliant abi lygybės puses n-tuoju laipsniu). Mokoma(si) ja naudotis, pertvarkant skaitinius reiškinius su šaknimis ir laipsniais. Pagrindžiama, kodėl laipsniams su racionaliaisiais rodikliais (ir veiksmams su tokiais laipsniais) būdingos laipsnių su natūraliaisiais rodikliais (ir veiksmams su tokiais laipsniais) savybės: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $a^n : a^m = a^{n-m}$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $(a : b)^m = a^m : b^m$. Mokoma(si) skaičiuotuvu rasti laipsnio su racionaliuoju rodikliu dešimtainę apytikslę reikšmę, taikyti laipsnių ir veiksmų su laipsniais savybes skaitiniams reiškiniams pertvarkyti.

Rekomendacijos.

Teorija. 1. Aiškinama(si) laipsnio su racionaliuoju rodikliu $a^{\frac{m}{n}}$ ($a > 0,\ a \neq 1,\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n > 1$) samprata, įrodant lygybę $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (abi lygybės puses keliant n-tuoju laipsniu.

2. Primenamos veiksmų su sveikaisiais laipsniais savybės $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $a^n : a^m = a^{n-m}$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $(a : b)^m = a^m : b^m$, pasakant, kad šios formulės tinka ir laipsniams su racionaliaisiais rodikliais.

Uždaviniai. 1. Mokoma(si) apskaičiuoti skaitinių reiškinių, kuriuose yra laipsnių su racionaliaisiais rodikliais reikšmes.

2. Mokoma(si) nustatyti tarp kokių gretimų sveikųjų skaičių yra iracionalusis skaičius $a^{\frac{m}{n}}$.

3. Mokomasi naudotis skaičiuotuvu, skaičiuojant skaitinių reiškinių su racionaliaisiais rodikliais reikšmes bei jų apytiksles dešimtaines reikšmes.

Šaknys.

Apibendrinant šaknies sąvoką, pateikiamas n-tojo ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) laipsnio šaknies apibrėžimas. Išsiaiškinama, pagrindžiama, kaip iracionalieji skaičiai $\sqrt{a}$ ($a \in \mathbb{N}$) vaizduojami skaičių tiesės taškais. Praktikuojamasi skaičiuotuvu rasti apytikslę duotojo iracionaliojo skaičiaus $\sqrt[n]{a}$ reikšmę. Aiškinamasi, kad n-tojo ($n \in \mathbb{N}$, $n > 3$) laipsnio šaknims būdingos antrojo ir trečiojo laipsnių šaknų (ir veiksmų su jomis) savybės: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$. Mokoma(si) šias savybes taikyti, apskaičiuojant skaitinių reiškinių su šaknimis reikšmes, skaičių įkeliant po n-tojo laipsnio šaknimi ir iškeliant jį prieš šaknies ženklą. Mokoma(si) trupmenos vardiklyje panaikinti iracionalumą, kai vardiklyje yra iracionalieji skaičiai $\sqrt{a}$, $\sqrt{a} + b$, $\sqrt{a} - b$.

Rekomendacijos.

Teorija. 1. Pateikiami lyginio ir nelyginio laipsnio šaknų apibrėžimai, paaiškinant, kaip jie siejasi su antrojo ir trečiojo laipsnio šaknų apibrėžimais.

2. Mokomasi, naudojantis Pitagoro teorema, skaičių tiesėje pažymėti iracionaliuosius skaičius $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

3. Pateikiamos veiksmų su šaknimis savybės $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$, jų teisingumą pagrindžiant ne tik skaitiniais pavyzdžiais, bet ir įrodant. Paaiškinama, kad šiomis formulėmis galima naudotis, kai jos parašytos atbulai. Tik šiuo atveju pravartu pastebėti, kad teisingos yra tokios formulės, pvz.,: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$.

Uždaviniai. 1. Mokoma(si) apskaičiuoti skaitinių reiškinių su šaknimis reikšmes.

2. Mokoma(si) nustatyti tarp kokių gretimų sveikųjų skaičių yra iracionalusis skaičius $\sqrt[n]{a}$.

3. Mokoma(si) dauginamąjį įkelti po šaknies ženklu $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$, bei dauginamąjį iškelti prieš šaknies ženklą.

4. Mokoma(si) panaikinti iracionalumą trupmenos vardiklyje, kai vardiklyje yra iracionalieji skaičiai $\sqrt{a}$, $\sqrt{a} + b$, $\sqrt{a} - b$.

Logaritmai.

Apibrėžiamos sąvokos: skaičiaus logaritmas, dešimtainis logaritmas. Praktikuojamasi skaičiuotuvu rasti apytikslę logaritmo reikšmę. Pateikiama ir skaitiniais pavyzdžiais iliustruojama pagrindinė logaritmų tapatybė $a^{\log_a(b)} = b$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$). Įrodomos ir pagrindžiamos veiksmų su logaritmais savybės: $\log_c(a) + \log_c(b) = \log_c(a \cdot b)$, $\log_c(a) - \log_c(b) = \log_c(a : b)$, $k \cdot \log_c(a) = \log_c(a^k)$ ($a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1, k \in \mathbb{Q}$), paaiškinant, kad šias lygybes galima taikyti ir atbulai. Mokoma(si) šias savybes taikyti, skaičiuojant skaitinių reiškinių su logaritmais reikšmes.

Rekomendacijos.

Teorija. 1. Įvedami mokiniams nepažįstami skaičiai, kurie rašomi naudojantis žymeniu log: skaičius, kuriuo pakėlę skaičių a gauname skaičių b rašomas taip $\log_a(b)$. Kitaip sakant, lygties $a^x = b$ sprendinys yra skaičius $x = \log_a(b)$. Paaiškinama, kad ne su visomis realiosiomis a ir b reikšmėmis logaritmas turi prasmę – jis prasmingas, kai $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, ir paaiškinama kodėl reikalingi šie apribojimai.

2. Įvedama dešimtainio logaritmo sąvoka.

3. Pateikiamos ir įrodomos veiksmų su logaritmais savybės: $\log_c(a) + \log_c(b) = \log_c(a \cdot b)$, $\log_c(a) - \log_c(b) = \log_c(a : b)$, $k \cdot \log_c(a) = \log_c(a^k)$ ($a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1, k \in \mathbb{Q}$), paaiškinant, kad šias lygybes galima taikyti ir atbulai (su tam tikrais apribojimais).

Uždaviniai. 1. Mokoma(si) nustatyti tarp kokių gretimų sveikųjų skaičių yra skaičius $\log_a(b)$.

2. Mokoma(si) rasti tikslias arba apytiksles logaritmų reikšmes (naudojantis ir skaičiuotuvu).

3. Naudojantis logaritmo apibrėžimu (lygybė $a^{\log_a(b)} = b$ vadinama pagrindine logaritmų tapatybe) mokoma(si) bet kurį teigiamą skaičių b parašyti kaip laipsnį norimu teigiamu, nelygiu 1, pagrindu, pvz., $2 = 3^{\log_3(2)}$.

4. Mokoma(si) apskaičiuoti skaitinių reiškinių su logaritmais reikšmes.

Sinusas, kosinusas ir tangentas.

Apibrėžiamas posūkio kampas, vienetinis apskritimas ir tangentų tiesė ($x = 1$). Naudojantis vienetiniu apskritimu, apibrėžiamas posūkio kampo sinusas ir kosinusas. Naudojantis tangentų tiese, apibrėžiamas posūkio kampo tangentas. Praktikuojamasi, naudojantis vienetiniu apskritimu ir tangentų tiese, apskaičiuoti tikslias sinuso, kosinuso, tangento reikšmes, kai posūkio kampas lygus ±0º, ±30º, ±45º, ±60º, ±90º, ±120º, ±135º, ±150º, ±180º, ±210º, ±225º, ±240º, ±270º, ±300º, ±315º, ±330º, ±360º. Tuo pačiu metodu parodoma, kad skaičiai $\sin(\alpha)$ ir $\cos(\alpha)$ turi prasmę su visomis realiosiomis α reikšmėmis, kodėl $\sin(\alpha)$ ir $\cos(\alpha)$ reikšmės kartojasi kas $360°$ ir visuomet priklauso intervalui $[-1; 1]$. Aptariama, kodėl $\operatorname{tg}(\alpha)$ reikšmės yra intervalo $(-\infty; +\infty)$ skaičiai ir kodėl jos kartojasi kas 180°. Įrodomos formulės: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$, $\sin(\alpha + 360° \cdot k) = \sin(\alpha)$ ($k \in \mathbb{Z}$) ir mokoma(si) jas taikyti. Apibrėžiami skaičiai $\arcsin(a)$ ir $\arccos(a)$, pagrindžiant, kodėl $\arcsin(a) \in [-90°;\ 90°]$, $\arccos(a) \in [0;\ 180°]$, o arksinusas ir arkkosinusas turi prasmę, kai $a \in [-1;\ 1]$. Apibrėžiami skaičiai $\operatorname{arctg}(a)$ ($a \in \mathbb{R}$), pagrindžiant, kodėl $\operatorname{arctg}(a) \in (-90°; 90°)$, o arktangentas turi prasmę visoje realiųjų skaičių aibėje. Praktikuojamasi apskaičiuoti tikslias ir apytiksles sinuso, kosinuso, tangento ir arksinuso, arkkosinuso, arktangento reikšmes.

Rekomendacijos.

Teorija. 1. Apibrėžiamas posūkio kampas, vienetinis apskritimas ir tangentų tiesė ($x = 1$). Kalbėdami apie vienetinį apskritimą, įrodykite jo lygtį ($x^2 + y^2 = 1$). Taip pat galima įrodyti ir lygtį apskritimo, kurio centras yra taške (a; b), o spindulio ilgis lygus r ($(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$).

2. Naudojantis vienetiniu apskritimu, apibrėžiamas posūkio kampo sinusas ir kosinusas. Prisiminkite pagrindinę trigonometrinę tapatybę ($\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$) ir jos įrodymą.

3. Naudojantis tangentų tiese, apibrėžiamas posūkio kampo tangentas. Prisiminkite to paties kampo sinusą, kosinusą ir tangentą siejančią formulę ($\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$).

4. Naudojantis vienetiniu apskritimu ir tangentų tiese bei Pitagoro teorema ir stačiojo trikampio savybėmis, mokoma(si) apskaičiuoti tikslias sinuso, kosinuso, tangento (kai jos egzistuoja) reikšmes, kai posūkio kampas lygus ±0º, ±30º, ±45º, ±60º, ±90º, ±120º, ±135º, ±150º, ±180º, ±210º, ±225º, ±240º, ±270º, ±300º, ±315º, ±330º, ±360º.

5. Parodoma, kad skaičiai $\sin(\alpha)$ ir $\cos(\alpha)$ turi prasmę su visomis realiosiomis α reikšmėmis, kodėl $\sin(\alpha)$ ir $\cos(\alpha)$ reikšmės kartojasi kas $360°$ ir visuomet priklauso intervalui $[-1; 1]$.

6. Aptariama, kodėl tg (α) reikšmės yra intervalo $(-\infty; +\infty)$ skaičiai ir kodėl jos kartojasi kas 180°.

7. Įrodomos formulės: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$, $\sin(\alpha + 360° \cdot k) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 360° \cdot k) = \cos(\alpha)$, $\operatorname{tg}(\alpha + 180° \cdot k) = \operatorname{tg}(\alpha)$, $k \in \mathbb{Z}$; mokoma(si) jas taikyti.

8. Apibrėžiami skaičiai $\arcsin(a)$ ir $\arccos(a)$, pagrindžiant, kodėl $\arcsin(a) \in [-90°;\ 90°]$, $\arccos(a) \in [0;\ 180°]$, o arksinusas ir arkkosinusas turi prasmę tik intervale $[-1;\ 1]$. Paaiškinama, kam reikalingi arksinusas ir arkkosinusas – šių skaičių prisireikia užrašant lygčių $\sin(x) = a$ ($a \in [-1; 1]$) sprendinius.

9. Apibrėžiamas skaičius $\mathrm{arctg}(a)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, pagrindžiant, kodėl $\mathrm{arctg}(a) \in (-90°; 90°)$, o arktangentas turi prasmę visoje realiųjų skaičių aibėje. Paaiškinama, kad arktangento prisireikia užrašant lygčių $\mathrm{tg}(x) = a$ ($a \in [-1; 1]$) sprendinius.

Uždaviniai. 1. Praktikuojamasi apskaičiuoti tikslias ir apytiksles (naudojantis ir skaičiuotuvu) sinuso, kosinuso, tangento ir arksinuso, arkkosinuso, arktangento reikšmes.

2. Mokoma(si) apskaičiuoti trigonometrinių reiškinių reikšmes.

3. Sprendžiami uždaviniai, kuriuose reikia apskaičiuoti $\cos(\alpha)$ $(\sin(\alpha))$ reikšmę, žinant $\sin(\alpha)$ $(\cos(\alpha))$ reikšmę ir ketvirtį, kuriam priklauso kampas α.

4. Sprendžiami uždaviniai, kuriuose reikia apskaičiuoti $\mathrm{tg}(a)$ reikšmę, žinant $\sin(\alpha)$ ar $\cos(\alpha)$ reikšmę ir ketvirtį, kuriam priklauso kampas α.

Modeliai ir sąryšiai

Progresijos.

Apibrėžiama, kokios skaičių sekos vadinamos aritmetinėmis progresijomis ir kokios – geometrinėmis progresijomis. Apibrėžiamos sąvokos: skaičių sekos pirmasis narys, n-tasis narys, begalinė skaičių seka, baigtinė skaičių seka, aritmetinės progresijos skirtumas, geometrinės progresijos vardiklis. Randami sekos nariai rekurentiniu būdu. Praktikuojamasi nustatyti ir pagrįsti, ar seka yra aritmetinė progresija, geometrinė progresija. Įrodomos ir įvairiems uždaviniams spręsti taikomos aritmetinės progresijos ir geometrinės progresijos n-tojo nario formulės, pirmųjų n narių sumos formulės: $a_n = a_1 + d(n-1)$, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$ $(n \in \mathbb{N},\ q \neq 1)$. Atliekami kūrybiniai projektiniai darbai (pavyzdžiui, Kocho snaigė, vėžlio ir bėgiko problema).

Rekomendacijos.

Teorija. *Aritmetinė progresija*. 1. Primenama, ką vadiname skaičių seka, sekų reiškimo būdus (surašant sekos narius arba užrašant keletą pirmųjų jos narių, nurodant sekos n-tojo nario formulę, seką nurodant rekurentiškai).

2. Primenamos lyginių ir nelyginių skaičių sekos bei jų n-tojo nario formulės.

3. Nagrinėjamos skaičių sekos, kurios vadinamos aritmetinėmis progresijomis:

- pateikiamas apibrėžimas, sąvokos, žymenys, pavyzdžiai,
- įrodomos n-tojo nario ir pirmųjų n narių sumos formulės.

4. Galima pateikti ir pavyzdžiais pagrįsti viduriniojo nario savybę.

Uždaviniai. Aritmetinė progresija. 1. Mokoma(si) iš duotųjų sekų atpažinti aritmetines progresijas, užrašyti įvairias aritmetines progresijas (surašant pirmuosius narius), kai yra žinoma jos pirmasis narys ir skirtumas, kai seka nurodyta rekurentiškai, kai žinoma jos n-tojo nario formulė ir panašiai.

2. Mokoma(si) apskaičiuoti aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumą.

3. Sprendžiami įvairūs įvairaus pobūdžio uždaviniai.

4. Pravartu apskaičiuoti natūraliųjų skaičių sumas nuo 1 iki 9 (10), nuo 1 iki 99 (100), nuo 1 iki 999 (1000), ... ir pastebėti sumų sekos dėsningumus.

Teorija. *Geometrinė progresija*. 1. Nagrinėjamos skaičių sekos, kurios vadinamos geometrinėmis progresijomis:

- pateikiamas apibrėžimas, sąvokos, žymenys, pavyzdžiai,
- įrodomos n-tojo nario ir pirmųjų n narių sumos formulės.

2. Galima pateikti ir pavyzdžiais pagrįsti viduriniojo nario savybę.

Uždaviniai. Geometrinė progresija. 1. Mokoma(si) iš duotųjų sekų atpažinti geometrines progresijas, užrašyti įvairias geometrines progresijas (surašant pirmuosius narius), kai yra žinoma jos pirmasis narys ir vardiklis, kai seka nurodyta n-tojo nario formule ir panašiai.

2. Mokomasi apskaičiuoti aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumą.

3. Sprendžiami įvairūs įvairaus pobūdžio uždaviniai.

4. Pravartu panagrinėti „Vėžlio ir bėgiko problemą“, pagrindžiant, kad $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$, nors nykstamoji geometrinės progresija ir neįeina į bendrojo kurso programą.

5. Pravartu panagrinėti Kocho snaigę, pasakant, kad jos perimetras yra begalinis, plotas – baigtinis.

Funkcijos.

Funkcijos samprata.
Plėtojama samprata apie funkcijas ir jų savybes. Apibrėžiamos sąvokos: lyginė funkcija; nelyginė funkcija; nei lyginė, nei nelyginė funkcija; periodinė funkcija. Nagrinėjant pavyzdžius, išsiaiškinama, kaip taikyti šiuos apibrėžimus, sprendžiant uždavinius, ir kaip pagal grafiką nustatyti funkcijos lyginumą, periodiškumą. Aptariama funkcijos $y = f(x)$ $(x \in D_f)$ grafiko transformacijos samprata. Naudojantis skaitmeninėmis priemonėmis, tyrinėjama, kaip atliekamos $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = -f(x)$, $y = a \cdot f(x)$ formulėmis aprašomos transformacijos. Atliekami tiriamieji, kūrybiniai darbai apie funkcijas, jų savybes, transformacijas ir jų pasireiškimą įvairaus konteksto situacijose.

Rekomendacijos.

Teorija. 1. Primenama, ką vadiname funkcija, funkcijos grafiku, funkcijų reiškimo būdus, sąvokas, žymenis.

2. Apibrėžiamos sąvokos: lyginė funkcija; nelyginė funkcija; nei lyginė, nei nelyginė funkcija; periodinė funkcija.

3. Nagrinėjamos funkcijų $y = f(x)$ grafikų transformacijos $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = -f(x)$, $y = a \cdot f(x)$.

Uždaviniai. 1. Mokoma(si), naudojantis apibrėžimais ir grafiškai nustatyti funkcijos lyginumą, periodiškumą.

2. Mokoma(si) nustatyti, ar pateikta kreivė yra funkcijos grafikas.

3. Sprendžiami su funkcijų grafikų transformacijomis susiję uždaviniai.

Laipsninė ir šaknies funkcijos.
Apibrėžiamos ir tiriamos laipsninė funkcija $y = f(x) = x^n$, kai $n \in \{-1; 1; 2; 3\}$, šaknies funkcijos $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$, kai $n \in \{2; 3\}$. Išsiaiškinami charakteringi taškai, priklausantys šių funkcijų grafikams, tiriamos funkcijų savybės. Mokoma(si) atpažinti funkcijas iš jų grafikų eskizų, parašyti funkcijų formules, kai nurodytas funkcijos grafikui priklausantis taškas. Nagrinėjami praktinių situacijų, kurios aprašomos ar modeliuojamos laipsninėmis ir šaknies funkcijomis, pavyzdžiai.

Rekomendacijos.

Teorija. 1. Primenamos funkcijos $y = f(x) = x, x^2$ bei su jomis susijusios transformacijos.

2. Nagrinėjama funkcija $y = f(x) = \frac{1}{x}$ bei su ja susijusios funkcijos $y = f(x) = \frac{k}{x}, \frac{k}{x+a}, \frac{k}{x+a} + b$.

3. Nagrinėjama funkcija $y = f(x) = x^3$ bei su ja susijusios funkcijos $y = f(x) = ax^3, (x+b)^3, x^3 + c, a(x+b)^3 + c$.

4. Nagrinėjamos funkcijos $y = f(x) = \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$ bei su jomis susijusios funkcijos $y = a\sqrt{x+b} + c, y = a\sqrt[3]{x+b} + c$.

5. Pravartu pastebėti, kad funkcijų $y = f(x) = x^2$ $(x \geq 0)$ ir $y = f(x) = \sqrt{x}$ bei funkcijų $y = f(x) = x^3$ ir $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.

Uždaviniai. 1. Mokoma(si) nubraižyti programoje nurodytų funkcijų grafikų eskizus, kai žinoma funkcijos formulė.

2. Mokoma(si) apskaičiuoti, ar taškas priklauso funkcijos grafikui.

3. Mokoma(si) iš pateiktų grafikų eskizų atpažinti, nustatyti funkcijos formulę.

4. Grafiškai sprendžiamos lygtys ir nelygybės.

Rodiklinė ir logaritminė funkcijos.

Apibrėžiama rodiklinė funkcija $y = f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, logaritminė funkcija $y = f(x) = \log_a(x)$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$. Išsiaiškinami charakteringi taškai, priklausantys šių funkcijų grafikams, tiriamos funkcijų savybės. Mokoma(si) atpažinti funkcijas iš jų grafikų eskizų, parašyti funkcijų formules, kai nurodytas funkcijos grafikui priklausantis taškas. Nagrinėjami praktinių situacijų, kurios aprašomos ar modeliuojamos rodiklinėmis ar logaritminėmis funkcijomis, pavyzdžiai.

Rekomendacijos.

Teorija. *Rodiklinė funkcija*. 1. Pateikiama funkcijos $y = f(x) = a^x$ samprata, paaiškinant, kad ir kodėl:

- laipsnis turi prasmę ir kai jo rodiklis yra iracionalus;
- rodiklinės funkcijos laipsnio pagrindas turi būti didesnis už 0 ir nelygus 1.

2. Nagrinėjami rodiklinių funkcijų $y = f(x) = a^x$ pavyzdžiai, vietoj a imant 2, 3; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, tiriamos šių funkcijų savybės.

3. Pastebima, kad rodiklinių funkcijų, kurių rodikliai yra atvirkštiniai skaičiai, grafikai yra vienas kitam simetriški ordinačių ašies atžvilgiu.

4. Apibendrinant nusakomos funkcijų $y = f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ir $y = f(x) = a^x$, kai $a > 1$, savybės.

5. Nagrinėjamos programoje nurodytos transformacijos.

Uždaviniai. 1. Mokoma(si) nubraižyti rodiklinių funkcijų grafikų eskizus, kai žinoma funkcijos formulė.

2. Mokoma(si) apskaičiuoti, ar taškas priklauso rodiklinės funkcijos grafikui.

3. Mokoma(si) iš pateiktų grafikų eskizų atpažinti, nustatyti rodiklinės funkcijos (ir transformuotos) formulę.

4. Grafiškai sprendžiamos lygtys ir nelygybės.

Teorija. *Logaritminė funkcija*. 1. Pateikiama funkcijos $f(x) = \log_a(x)$ samprata, paaiškinant, kad (ir kodėl) logaritminė funkcija turi prasmę, kai logaritmo pagrindas yra didesnis už 0 ir nelygus 1, o logaritmo skaičius yra teigiamas $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$;

2. Nagrinėjami logaritminių funkcijų $y = f(x) = \log_a(x)$ pavyzdžiai, vietoj a imant 2, 3; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, tiriamos šių funkcijų savybės.

3. Pastebima, kad logaritminių funkcijų, kurių rodikliai yra atvirkštiniai skaičiai, grafikai yra vienas kitam simetriški abscisių ašies atžvilgiu.

4. Apibendrinant nusakomos funkcijų $y = f(x) = \log_{\frac{1}{a}}(x)$ ir $y = f(x) = \log_a(x)$, kai $a > 1$, savybės.

5. Pastebima, kad funkcijų $y = f(x) = a^x$ ir $= f(x) = \log_a(x)$ grafikai yra simetriški vienas kitam tiesės $y = x$ atžvilgiu.

6. Nagrinėjamos programoje nurodytos transformacijos.

Uždaviniai. 1. Mokoma(si) nubraižyti įvairių logaritminių funkcijų grafikų eskizus, kai žinoma funkcijos formulė.

2. Mokoma(si) apskaičiuoti, ar taškas priklauso logaritminės funkcijos grafikui.

3. Mokoma(si) iš pateiktų grafikų eskizų atpažinti, nustatyti logaritminės funkcijos (ir transformuotos) formulę.

4. Grafiškai sprendžiamos lygtys ir nelygybės.

Trigonometrinės funkcijos.
Naudojantis vienetiniu apskritimu, apibrėžiamos bet kokio posūkio kampo (išreikšto laipsniais) sinuso ir kosinuso funkcijos, o naudojantis tangentų tiese ($x = 1$), apibrėžiama tangento funkcija. Braižomi sinusoidės, kosinusoidės ir tangentoidės grafikų eskizai. Išsiaiškinami charakteringi taškai, priklausantys šių funkcijų grafikams, tiriamos funkcijų savybės. Mokoma(si) atpažinti funkcijas iš jų grafikų eskizų, rasti nurodytas sąlygas, atitinkančias argumento ir funkcijos reikšmes (pavyzdžiui, didžiausią funkcijos reikšmę nurodytame intervale). Praktikuojamasi, naudojantis grafiko eskizu, užrašyti visas argumento reikšmes, su kuriomis funkcija įgyja tam tikrą reikšmę, yra didėjančioji ar mažėjančioji, yra teigiamoji ar neigiamoji. Mokoma(si), naudojantis sinuso, kosinuso ir tangento samprata ir (ar) pasitelkus grafinį metodą, spręsti $\sin(x) = a$, $\cos(x) = a$, $\operatorname{tg}(x) = a$ pavidalo lygtis.

Rekomendacijos.

Teorija. 1. Prisimenamas vienetinis apskritimas ir posūkio kampas; posūkio kampo sinusas bei kosinusas.

2. Braižoma sinusoidė ir kosinusoidė ir aptariamos sinuso funkcijos ir kosinuso funkcijos savybės. Pravartu pastebėti, kad kosinuso grafiką galima gauti pastumiant sinuso grafiką ($\sin(x + 90°) = \cos(x)$).

3. Naudojantis grafikais tiriamos funkcijų savybės.

4. Primenama tangentų tiesė ir posūkio kampo tangento samprata.

5. Braižomas tangento grafikas ir aptariamos tangento funkcijos savybės.

Uždaviniai. 1. Mokoma(si) atpažinti trigonometrinės funkcijos formulę, kai žinomas funkcijos grafikas.

2. Mokoma(si) nustatyti trigonometrinių funkcijų savybes.

3. Grafiškai sprendžiamos paprasčiausios trigonometrinės lygtys.

Lygtys.

Rekomendacijos. Vadovautis programa.

Racionaliosios lygtys.
Apibendrinamos, gilinamos ir plečiamos žinios apie racionaliąsias lygtis ir jų sprendimo būdus. Mokoma(si) atpažinti ir spręsti $a \cdot x^n + b = 0$ (a, b – racionalieji skaičiai, $n \in \{2; 3; 4; 5\}$); $f(x) \cdot g(x) = 0$ ($f(x)$ ir $g(x)$ – ne aukštesnio negu antrojo laipsnio daugianariai) pavidalo lygtis; lygtis, kurios suvedamos į kvadratines lygtis. Praktikuojamasi grafiškai spręsti $f(x) = g(x)$, kai $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ yra tiesinė funkcija, kvadratinė funkcija, laipsninė funkcija, pavidalo lygtis. Pasitelkus pavyzdžius, aiškinamasi, kad tikslius lygties sprendinius gauname, spręsdami algebriškai, o grafiškai dažniausiai gaunami apytiksliai sprendiniai. Mokoma(si), sprendžiant tekstinius ar geometrijos uždavinius, sudaryti lygtį, ją išspręsti ir atrinkti uždavinio sąlygą atitinkantį atsakymą.

Iracionaliosios lygtys.
Apibrėžiama iracionaliosios lygties sąvoka. Mokoma(si) spręsti iracionaliąsias $b \cdot \sqrt{f(x)} + a = 0$, $b \cdot \sqrt[3]{f(x)} = a$ ($f(x)$ – ne aukštesnio negu antrojo laipsnio daugianaris, a ir b – racionalieji skaičiai, $a \neq 0$) pavidalo lygtis. Analizuojama, kodėl ir kada gautuosius pertvarkytosios lygties sprendinius būtina tikrinti, kodėl tarp pertvarkytosios lygties sprendinių gali atsirasti tokių, kurie nėra duotosios iracionaliosios lygties sprendiniai. Sprendžiami uždaviniai, kuriuose situacijos modeliuojamos iracionaliosiomis lygtimis.

Rodiklinės lygtys.
Apibrėžiama rodiklinės lygties sąvoka. Mokoma(si) algebriškai spręsti rodiklines lygtis, suvedant jas į pavidalą: $a^{f(x)} = a^r$ ($r \in \mathbb{Q}$), $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($f(x)$, $g(x)$ – ne aukštesnio negu antrojo laipsnio daugianariai). Praktikuojamasi rodiklines lygtis spręsti grafiškai. Sprendžiami uždaviniai, kuriuose situacijos modeliuojamos rodikline funkcija (pavyzdžiui, $f(n) = k \cdot a^n$, $S(n) = S_0 \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n$).

Logaritminės lygtys.
Apibrėžiama logaritminės lygties sąvoka. Mokoma(si) spręsti logaritmines $\log_a(f(x)) + b = 0$, $\log_a(f(x)) = \log_a(g(x))$ ($f(x)$ ir $g(x)$ – ne aukštesnio negu antrojo laipsnio daugianariai). Analizuojama, kada ir kodėl būtina atsižvelgti į logaritmo apibrėžimo sritį, gautuosius sprendinius tikrinti (juos įrašant į duotąją lygtį). Sprendžiami uždaviniai, kuriuose situacijos modeliuojamos logaritminėmis lygtimis.

Lygčių sistemos.

Apibendrinamos ir gilinamos žinios algebriškai sprendžiant įvairias dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas. Mokoma(si) įvairaus konteksto situacijas modeliuoti lygčių sistemomis.

Nelygybės.

Rekomendacijos. Vadovautis programa.

Racionaliosios nelygybės.

Nagrinėjant kvadratines nelygybes, atskleidžiama intervalų metodo esmė. Paaiškinama, kad intervalų metodą patogu taikyti, sprendžiant ir kitas nelygybes. Apibrėžiama racionaliosios nelygybės sąvoka. Mokoma(si) spręsti paprastas trupmenines racionaliąsias nelygybes intervalų metodu. Praktikuojamasi spręsti paprastas nelygybių sistemas (su vienu nežinomuoju), kurių viena nelygybė yra tiesinė, o kita – kvadratinė arba trupmeninė racionalioji.

Rodiklinės nelygybės.

Apibrėžiamos rodiklinės nelygybės. Mokoma(si) spręsti rodiklines nelygybes, kurių bendri pavidalai yra $a^{f(x)} \gtreqless a^r$ ($r \in \mathbb{Z}$), $a^{f(x)} \gtreqless a^{g(x)}$ ($f(x)$ ir $g(x)$ – ne aukštesnio negu pirmojo laipsnio vienanariai, dvinariai).

Logaritminės nelygybės.

Apibrėžiamos logaritminės nelygybės. Mokoma(si) spręsti logaritmines nelygybes, kurių bendri pavidalai yra $\log_a(x) \gtreqless b$, $\log_a(f(x)) \gtreqless \log_a(g(x))$ ($f(x)$ ir $g(x)$ – ne aukštesnio negu pirmojo laipsnio vienanariai, dvinariai). Analizuojama, kada ir kodėl būtina atsižvelgti į logaritmo apibrėžimo sritį.

IV gimnazijos klasės matematikos dalyko bendrojo kurso mokymo turinio nuoseklaus išdėstymo pavyzdys 2024/2025 m. m.

34 savaitės × **4** pamokos per savaitę = **136** pamokos per mokslo metus:
30 savaičių × **4** pamokos per savaitę = **120** pamokų – mokymo turinio įsisavinimas,
4 savaitės × **4** pamokos per savaitę = **16** pamokų – rengimasis II dalies VBE.

1. Trigonometriniai reiškiniai. Trigonometrinės lygtys (24 pamokos)
- 1.1. Trigonometrinės formulės ir trigonometriniai reiškiniai (12 pamokų)
- 1.2. Trigonometrinės lygtys (12 pamokų)

2. Išvestinės (28 pamokos)
- 2.1. Funkcijos išvestinės samprata (4 pamokos)
- 2.2. Funkcijos išvestinės radimas (8 pamokos)
- 2.3. Funkcijų savybių tyrimas naudojantis išvestine (8 pamokos)
- 2.4. Išvestinių taikymai (8 pamokos)

3. Stereometrija ir erdviniai kūnai (36 pamokos)
- 3.1. Stereometrijos sąvokos, aksiomos, teoremos (6 pamokos)
- 3.2. Tiesės, plokštumos ir kampai erdvėje (6 pamokos)
- 3.3. Briaunainiai (12 pamokų)
- 3.4. Sukiniai (12 pamokų)

4. Duomenys ir tikimybės (32 pamokos)
- 4.1. Įvadas į statistinę duomenų analizę (8 pamokos)
- 4.2. Tikimybės ir jų interpretavimas (24 pamokos)

5. Rengimasis II dalies valstybiniam brandos egzaminui (16 pamokų)

IV gimnazijos klasės bendrojo kurso mokymo turinio apžvalga

Modeliai ir sąryšiai

Trigonometrinės lygtys.

Mokoma(si) tapačiai pertvarkyti skaitinius ir raidinius reiškinius, taikant formules: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}(\alpha)$, $1 + \mathrm{tg}^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$, $\sin(\alpha + 360° \cdot k) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 360° \cdot k) = \cos(\alpha)$, $\mathrm{tg}(\alpha + 180° \cdot k) = \mathrm{tg}(\alpha)$, $k \in \mathbb{Z}$. Nagrinėjami situacijų, kai sudaromos ir sprendžiamos trigonometrinės lygtys, pavyzdžiai. Aptariama, kada patogu trigonometrines lygtis spręsti algebriniu būdu. Pateikiamos ir aptariamos lygčių $\sin(x) = a$ $(a \in [-1; 1])$, $\cos(x) = a$ $(a \in [-1; 1])$, $\mathrm{tg}(x) = a$ $(a \in \mathbb{R})$ sprendinių formulės. Mokoma(si) spręsti $a \cdot f(x) + b = 0$, kur $f(x) =$ $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{tg}(x)$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ pavidalo lygtis. Praktikuojamasi rasti trigonometrinės lygties sprendinius nurodytame intervale.

Rekomendacijos.

1. *Samprata*. Buvo pateikta III gimnazijos klasėje: vienetinis apskritimas, tangentų tiesė, posūkio kampas.

2. *Formulės*. Visos formulės surašytos programoje, bet reikėtų iš pagrindinės mokyklos priminti formules $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$, aptarti VBE formulių rinkinyje esančias formules.

3. *Lygčių sprendimas*. Pateikiamos formulės (jos pagrindžiamos, aptariamos). Mokoma(si), naudojantis sprendinių formulėmis užrašyti lygties sprendinius ir atrinkti sprendinius, kurie patenka į nurodytą intervalą. Nepamiršti grafinio sprendimo būdo.

Funkcijos išvestinė.

Funkcijos išvestinės samprata.
Aiškinama(si), ką vadiname funkcijos argumento pokyčiu ir funkcijos reikšmės pokyčiu. Šių pokyčių santykis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ susiejamas su tiesės $y = kx + b$ krypties koeficientu k ir paaiškinama, kaip su juo susijęs funkcijos reikšmių kitimas. Apibrėžiama (tolydžios) funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės, einančios per nurodytą grafiko tašką, sąvoka, paaiškinama, kaip per grafiko tašką $(a; f(a))$ einanti liestinė apibūdina funkcijos reikšmių kitimą pereinant šį tašką (geometrinė išvestinės prasmė). Pateikiamas funkcijos $y = f(x)$ išvestinės apibrėžimo srities taške $x = a$ ryšys su taške $(a; f(a))$ nubrėžtos funkcijos grafiko liestinės krypties koeficientu ($k = f'(a)$). Formuluojamas funkcijos $y = f(x)$ išvestinės taške $x = a$ apibrėžimas, išvestinės funkcijos $y = f'(x)$ apibrėžimas. Naudojantis funkcijos išvestinės apibrėžimu, mokoma(si) rasti pastoviosios, tiesinės ir kvadratinės funkcijų išvestines. Be įrodymo pateikiama laipsninės funkcijos $y = f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) išvestinės radimo taisyklė ir taisyklės, kuriomis naudojantis galima apskaičiuoti išvestines: $\left(a \cdot f(x)\right)' = a \cdot f'(x)$, $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$, $\left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x)$. Mokoma(si) apskaičiuoti funkcijos išvestinės reikšmę duotame funkcijos apibrėžimo srities vidiniame taške, spręsti lygtį $f'(x) = a$. Nagrinėjant konkrečius pavyzdžius, aptariama išvestinės fizikinė prasmė.

Rekomendacijos.

1. *Samprata*. Aiškinant funkcijos išvestinės sampratą riekia funkcijos išvestinę sieti su funkcijos grafiko liestinės krypties koeficientu.

2. *Išvestinės apibrėžimo taikymas*. Naudojantis išvestinės apibrėžimu mokyti rasti $y = f(x) = a; ax; ax^2 + bx + c$ išvestines nurodytame funkcijos apibrėžimo srities taške $x = a$ ir funkcijos išvestinę $y = f'(x)$.

3. *Išvestinių skaičiavimo taisyklės*. Be įrodymo pateikiamos programoje surašytos išvestinių skaičiavimo taisyklės bei laipsnio išvestinės formulė.

4. *Išvestinės fizikinė prasmė*. Nuvažiuoto kelio priklausomybės nuo važiavimo laiko, kai važiuojama pastoviu greičiu, išvestinė lygi važiavimo greičiui: $S'(t) = (vt)' = v$, pavyzdžiui: $S'(t) = (5t)' = 5$, $S'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = gt$.

Funkcijos savybių tyrimas, naudojantis išvestine.
Apibrėžiamos sąvokos: funkcijos kritiniai, ekstremumo (minimumo ir maksimumo) taškai, ekstremumai. Išsiaiškinama, kodėl ir kaip, naudojantis išvestine, galima rasti funkcijos apibrėžimo srities intervalus, kuriuose funkcija yra didėjančioji, mažėjančioji, pastovioji, funkcijos ekstremumus, didžiausiąją ir mažiausiąją reikšmes uždarame intervale. Tiriamos funkcijų, išreikštų ne aukštesnio negu trečiojo laipsnio daugianariais, savybės, braižomi jų grafikų eskizai. Praktikuojamasi taikyti išvestines, sprendžiant optimizavimo uždavinius.

Rekomendacijos.

1. *Naujos sąvokos*:

- funkcijos kritinis taškas ir funkcijos reikšmė kritiniame taške;
- funkcijos ekstremumo taškas ir funkcijos ekstremumas (funkcijos reikšmė ekstremumo taške);
- funkcijos minimumo taškas ir funkcijos minimumas (funkcijos reikšmė minimumo taške);
- funkcijos maksimumo taškas ir funkcijos maksimumas (funkcijos reikšmė maksimumo taške).

2. *Uždaviniai*.

- Funkcijos savybių tyrimas, naudojantis išvestine – funkcijos apibrėžimo srities intervalų, kuriuose funkcija yra didėjančioji, mažėjančioji radimas.
- Funkcijos didžiausios ir mažiausios reikšmių radimas nurodytame uždarame apibrėžimo srities intervale.
- Funkcijos savybių nustatymas, naudojantis pateiktu funkcijos išvestinės grafiku.
- Dviejų realiųjų skaičių suma lygi a. Kam lygi didžiausia tokių dviejų skaičių sandauga.
- Stačiakampio perimetras lygus P. Kokie yra tokio stačiakampio, kurio plotas yra didžiausias, matmenys?
- Funkcijos grafiko eskizo braižymas, kai funkcijos reiškinys yra trečiojo laipsnio daugianaris $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Geometrija ir matavimai

Tiesės, plokštumos, kampai erdvėje.

Susipažįstama su stereometrijos aksiomomis: per bet kuriuos du taškus eina vienintelė tiesė; per bet kuriuos tris taškus, nesančius vienoje tiesėje, eina vienintelė plokštuma; jei du tiesės taškai priklauso plokštumai, tai ir tiesė priklauso plokštumai; jei dvi plokštumos turi bendrą tašką, tai jos turi ir bendrą tiesę, kurioje yra visi bendrieji tų plokštumų taškai. Aptariamos teoremos: per tiesę ir jai nepriklausantį tašką eina vienintelė plokštuma; per dvi susikertančias tieses eina vienintelė plokštuma; per dvi lygiagrečias tieses eina vienintelė plokštuma. Mokoma(si) taikyti šias teoremas. Tyrinėjama ir apibrėžiama, kokios gali būti tiesės ir plokštumos, dviejų plokštumų tarpusavio padėtys. Nagrinėjami atstumai ir kampai erdvėje: atstumas tarp dviejų taškų, tarp taško ir tiesės, taško ir plokštumos, dviejų lygiagrečių tiesių, tiesės ir su ja lygiagrečios plokštumos, dviejų lygiagrečių plokštumų; kampai tarp susikertančių ir tarp prasilenkiančių tiesių, tarp tiesės ir plokštumos. Apibrėžiamas dvisienis kampas, mokoma(si) jį rasti ar pavaizduoti brėžinyje, modelyje. Apibrėžiama, kokia tiesė vadinama statmeniu plokštumai, įrodomas tiesės ir plokštumos statmenumo požymis. Apibrėžiama pasviroji plokštumai ir jos statmenoji projekcija plokštumoje. Įrodomas tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymis. Mokoma(si) šias žinias taikyti, nagrinėjant paprasčiausias realias situacijas, sprendžiant paprasčiausius uždavinius.

Rekomendacijos.

Patarimas. Nagrinėjant grynąją stereometriją pravartu remtis stačiakampio gretasienio modeliu (pvz., klasės kabinetu).

1. Paaiškinama, kas yra aksiomos, kam jos reikalingos. Patartina pasakyti, kad yra ne tik pirminiai teiginiai (aksiomos), bet ir pirminės sąvokos (stereometrijoje – taškas, tiesė, plokštuma).

2. Pateikiamos programoje surašytos aksiomos. Patartina pasakyti ir planimetrijos aksiomas.

3. Aptariamos ir panagrinėjamos programoje surašytos teoremos.

4. Nagrinėjamos dviejų erdvės tiesių tarpusavio padėtys.

5. Nagrinėjama tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtys.

6. Nagrinėjamos dviejų plokštumų tarpusavio padėtys.

7. Mokomasi rasti atstumą:

- tarp dviejų erdvės taškų, nuo taško iki tiesės; nuo taško iki plokštumos;
- tarp dviejų lygiagrečių tiesių; tarp dviejų prasilenkiančių tiesių; nuo tiesės iki jai lygiagrečios plokštumos;
- tarp dviejų lygiagrečių plokštumų.

8. Mokomasi rasti kampą:

- tarp tiesės ir plokštumos;
- tarp dviejų susikertančių plokštumų;
- tarp dviejų prasilenkiančių tiesių.

Briaunainiai ir sukiniai.

Apibrėžiamos sąvokos: sukinys, briaunainis. Mokoma(si) atpažinti erdvės figūras: stačiąsias prizmes, piramides, ritinius, kūgius ir rutulius. Išsiaiškinama, kaip brėžinyje tinkamai pavaizduoti taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižinį pjūvį, taisyklingosios keturkampės piramidės įstrižinį pjūvį, ritinio ir kūgio ašinius pjūvius. Sprendžiami su erdvės figūrų pjūvio plotu, paviršiaus plotu ir tūriu susiję uždaviniai. Susipažįstama su taisyklingųjų briaunainių, sukinių pasireiškimo gamtoje ir žmogaus veikloje pavyzdžiais.

Rekomendacijos.

1. *Mokiniai turi žinoti, bet jau bus primiršę*. Su programoje nurodytomis erdvės figūromis mokiniai susipažino 8 klasėje:

Erdvės figūros (20 pamokų)

Stačioji prizmė (4 pamokos)
Taisyklingoji piramidė (4 pamokos)
Ritinys (4 pamokos)
Kūgis (4 pamokos)
Sfera ir rutulys (4 pamokos)

Sunku tikėtis, kad mokiniai jų bus neprimiršę, todėl rekomenduotina viską pradėti nuo pradžios, kaip nurodyta programoje, apibrėžiant sukinius ir briaunainius.

2. *Pjūviai*:

- Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižinis pjūvis – stačiakampis, gautas prizmę kertant plokštuma, einančia per prizmės priešingas briaunas.
- Taisyklingosios keturkampės piramidės įstrižinis pjūvis – trikampis, gautas piramidę kertant plokštuma, einančia per piramidės viršūnę ir dvi priešingas pagrindo viršūnes.
- Ritinio ašinis pjūvis – stačiakampis, gautas ritinį kertant plokštuma, einančia per ritinio aukštinę.
- Kūgio ašinis pjūvis – lygiašonis trikampis, gautas kūgį kertant plokštuma, einančia per kūgio aukštinę.

3. *Uždaviniai*. Tradiciniai: skaičiuojame šoninio paviršiaus, viso paviršiaus plotus; programoje surašytų figūros pjūvių plotus; figūros ir jos dalių tūrius; figūros briaunų, įstrižainių, aukštinės ir pan. ilgius; įvairių kampų didumus; įvairius atstumus.

Duomenys ir tikimybės

Įvadas į statistinę duomenų analizę.

Susipažįstama su statistinės duomenų analizės procesais, kurių metu nustatomas statistinio tyrimo klausimas, renkami, tvarkomi, analizuojami atitinkami duomenys, interpretuojami analizės rezultatai bei daromos išvados. Akcentuojama, kad duomenų analizė yra plačiai taikoma įvairiose srityse, pavyzdžiui, verslo, sveikatos priežiūros, finansų, bei moksliniuose tyrimuose. Paaiškinama, kad funkcijos gali būti naudojamos duomenims apibūdinti, o jei duomenys susiję tiesiniu ryšiu, tai tas ryšys gali būti modeliuojamas tiese ir šio ryšio stiprumas ir kryptis išreikšti koreliacijos koeficientu. Išsiaiškinama, kad svarbi šio modelio (tiesės) charakteristika – determinacijos koeficientas (R kvadratas). Mokoma(si), jį žinant (suradus), priimti sprendimą dėl gauto modelio tinkamumo duomenims aprašyti. Mokiniai išsiaiškina, kad statistinės analizės tikslas – ištyrus dalį respondentų (imtį), padaryti pagrįstą išvadą apie visą populiaciją. Aptariami kintamojo, kintamojo matavimo skalių bei duomenų tipai. Mokoma(si) praktiškai, naudojant skaitmenines technologijas, apskaičiuoti duomenų rinkinio vidurkį, standartinį nuokrypį, interpretuoti, kaip jie charakterizuoja imtį. Nagrinėjami pavyzdžiai, kai sprendimui dėl kintamųjų ryšio ir jo stiprumo priimti naudojama(si) koreliacija. Atkreipiamas dėmesys, kad koreliacija nepaaiškina priežastingumo. Išsiaiškinama, kaip priimamas sprendimas, kuris kintamasis vadinamas priklausomu kintamuoju, o kuris – aiškinamuoju. Skaitmeninių technologijų pagalba mokoma(si) duomenis vaizduoti grafiškai (vizualizuoti). Mokoma(si) diskutuoti apie statistinio tyrimo struktūrą, duomenų rinkimo sąlygas ir būdą, duomenų analizei taikytus metodus, duomenų santraukas ir padarytas išvadas.

Rekomendacijos. statistinio-rastingumo-ugdymas-9-12-kl-mokytojams.pdf (emokykla.lt)

Tikimybės ir jų interpretavimas.

Sprendžiant uždavinius, naudojamasi tikimybės apibrėžimu ir tikimybių savybėmis: būtinojo įvykio tikimybė $\mathrm{P(būtinojo)} = 1$, negalimojo įvykio $\mathrm{P(negalimojo)} = 0$, vienas kitam priešingų įvykių tikimybių suma $\mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1$. Nagrinėjami paprasčiausi dviejų trijų etapų bandymai (stochastiniai bandymai) ir su jo etapais susiję nepriklausomi ar priklausomi įvykiai (negrąžintinio ir grąžintinio ėmimo atvejai). Braižomi tikimybių medžiai ir analizuojami su bandymu susiję nesutaikomi įvykiai, mokoma(si) be formulių apskaičiuoti įvykių „A arba B“, „A ir B“ tikimybes, atkreipiamas dėmesys į jungtukų „ir“ bei „arba“ esmę. Aptariama, kokie bandymo (stochastinio bandymo) įvykiai vadinami elementariais, o kokie – sudėtiniais. Mokoma(si) atpažinti ir formuluoti su bandymu susijusius sudėtinius įvykius, apskaičiuoti jų tikimybes. Nagrinėjant pavyzdžius, aptariama, kokie įvykiai vadinami nesutaikomais, sutaikomais. Mokoma(si) tokiems įvykiams palankias baigtis pavaizduoti Veno diagramomis, galimybių medžiais, galimybių lentelėmis. Praktikuojamasi apskaičiuoti įvykių tikimybes.

Rekomendacijos.

1. Tikimybes mokiniai nagrinėjo 6 klasėje ir 10 (II gimnazijos) klasės pabaigoje, ir ta tematika neįėjo į PUPP užduotį, todėl nemaža tikimybė, kad mokiniai tikimybių nežino.

2. *Įvykių nesutaikomumas*.

- $\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$, kai įvykiai A ir B yra nesutaikomi (neturi vienodų baigčių);
- $\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \text{ ir } B)$, kai įvykiai A ir B nėra nesutaikomi (turi vienodų baigčių).

Pavyzdys. Metamas standartinis žaidimo kauliukas. Stebima kiek akučių atvirto.

Įvykis A – „Atvirto lyginis skaičius akučių“, $A = \{2; 4; 6\}$.

Įvykis B – „Neatvirto nei 1, nei 6“, $B = \{2; 3; 4; 5\}$.

Įvykis $(A \text{ arba } B) = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

Įvykis $(A \text{ ir } B) = \{2; 4\}$.

$\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

3. *Įvykių nepriklausomumas*.

- $\mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$ – įvykiai A ir B yra nepriklausomi (vieno jų įvykimas ar neįvykimas neturi įtakos kito įvykio tikimybei).

Pavyzdys. Moneta metama tris karus. Kokia tikimybė, kad moneta visus tris kartus atvirs ta pačia puse?

Sprendimas. 1. Surašome visa galimas bandymo baigtis, pažymėdami S – „Atvirto skaičius“, H – „Atvirto herbas“:
$SSS, SSH, SHS, HSS, SHH, HSH, HHS, HHH$ – iš viso 8 baigtys.
2. Apskaičiuojame tikimybę:

- *I būdas***.** $\mathbf{P}(SSS \text{ arba } HHH) = \mathbf{P}(SSS\ ) + \mathbf{P}(HHH) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
- *II būdas*. $\mathbf{P}(SSS \text{ arba } HHH) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Pastabos. 1. Iš viso bandymas turi $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ baigtis, nes kiekvienas monetos metimas turi 2 baigtis.
2. Kiekvienos baigties tikimybė $\mathbf{P}(SSS) = \mathbf{P}(SSH) = \mathbf{P}(SHS) = \mathbf{P}(HSS) = \mathbf{P}(SHH) = \mathbf{P}(HSH) = \mathbf{P}(HHS) = \mathbf{P}(HHH) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Turinio sričių, pasiekimų sričių ir užduoties taškų pasiskirstymas procentais VBE užduotyse

I dalies VBE B kursas Turinio sritys	Pasiekimų sritys			Užduoties taškai procentais
	Žinios, supratimas ir argumentavimas	Matematinis komunikavimas	Problemų sprendimas	
Skaičiai ir skaičiavimai				40
Modeliai ir sąryšiai				60
Geometrija ir matavimai	–	–	–	–
Duomenys ir tikimybės	–	–	–	–
Iš viso taškų procentais	50	40	10	100

II dalies VBE B kursas Turinio sritys	Pasiekimų sritys			Užduoties taškai procentais
	Žinios, supratimas ir argumentavimas	Matematinis komunikavimas	Problemų sprendimas	
Skaičiai ir skaičiavimai				15
Modeliai ir sąryšiai				50
Geometrija ir matavimai				20
Duomenys ir tikimybės				15
Iš viso taškų procentais	30	45	25	100

VBE užduočių specifikacijos santrauka

Matematikos valstybinio brandos egzamino **pirma dalis** (III gimnazijos klasė)	
0. Data	2025 m. gegužės 30 d.
1. Tematika	Užduotyje gali būti uždavinių iš visų III gimnazijos klasės matematikos mokymo turinio sričių, temų ir potemių.
2. Pobūdis	Užduotį sudaro 28–35 dviejų tipų uždaviniai, vertinami 1 tašku arba 2 taškais: • pasirenkamojo atsakymo (iš viso 20 taškų), • trumpojo atsakymo (iš viso 20 taškų).
3. Taškų suma	40 tšk.
4. Trukmė	120 min.
5. Pateikimas	Užduotis pateikiama ir atliekama elektroninėje užduoties atlikimo (testavimo) sistemoje. Uždavinio (klausimo) vertė taškais pateikiama prie kiekvieno uždavinio ir klausimo.
6. Priemonės ir priedai	Lapas užrašams, kompiuteris, skaičiuotuvas, formulių rinkiniai (skirtingi A ir B kursams).
7. Vertinimas	Atliktos užduotys vertinamos automatiškai elektroninėje užduoties atlikimo (testavimo) sistemoje.
Matematikos valstybinio brandos egzamino **antra dalis** (IV gimnazijos klasė)	
0. Data	2025 m. birželio 6 d.
1. Tematika	Užduotyje gali būti uždavinių iš visų III–IV gimnazijos klasių matematikos mokymo turinio sričių, temų ir potemių.
2. Pobūdis	Užduotį sudaro 10–17 dviejų tipų uždaviniai: • 10 trumpojo atsakymo, vertinamų 1 tašku (iš viso 10 taškų), • 7–10 pilnojo sprendimo uždaviniai (iš viso 50 taškų).
3. Taškų suma	60 tšk.
4. Trukmė	240 min.
5. Pateikimas	Užduoties sąsiuvinis ir atsakymų lapas. Uždavinio vertė taškais pateikiama prie kiekvieno uždavinio.
6. Priemonės ir priedai	Skaičiuotuvas, formulių rinkiniai (skirtingi A ir B kursams).
7. Vertinimas	Atliktas užduotis vertina vertintojai elektroninėje vertinimo sistemoje.
8. Gebėjimai	Žinios ir supratimas – 30 proc., taikymas – 55 proc., aukštesnieji mąstymo gebėjimai – 15 proc.
9. Pasiekimų lygiai	Slenkstinis – 35 proc., patenkinamas – 15 proc., pagrindinis – 35 proc., aukštesnysis – 15 proc.
VBE vertinimas (rezultatas)	
Tarpinis (20 tšk.) $+$ VBE antra dalis (60 tšk.) $\times \frac{4}{3} +$ 5 tšk. VBE pirma dalis (40 tšk.) $+$ VBE antra dalis (60 tšk.) $+$ 5 tšk.	100 B $\equiv$ 60 A

MATEMATIKOS VBE BENDROJO KURSO FORMULIŲ RINKINYS (PROJEKTAS)

1. Greitoji daugyba:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

2. Laipsniai:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $a^n : a^m = a^{n-m}$, $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$,

$a^n : b^n = (a : b)^n$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(a > 0; n, m \in \mathbb{N}, n > 1)$.

3. Šaknys:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$; čia $n, m \in \mathbb{N}, n > 1, m > 1$.

4. Logaritmai:

$a^{\log_a(b)} = b$; kai $a^x = b$, tai $x = \log_a(b)$; $\log_a(b) + \log_a(c) = \log_a(b \cdot c)$,

$\log_a(b) - \log_a(c) = \log_a(b : c)$, $k \cdot \log_a(b) = \log_a(b^k)$; čia $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$.

5. Trigonometrija:

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, $1 + \mathrm{tg}^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$.

$\alpha =$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin(\alpha) =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha) =$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}(\alpha) =$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Lygtis	$\sin(x) = a, a \in [-1; 1]$,	$\cos(x) = a, a \in [-1; 1]$,	$\mathrm{tg}(x) = a, a \in \mathbb{R}$,
$x =$	$(-1)^k \cdot \arcsin(a) + 180° \cdot k, k \in \mathbb{Z}$.	$\pm \arccos(a) + 360° \cdot k, k \in \mathbb{Z}$.	$\mathrm{arctg}(a) + 180° \cdot k, k \in \mathbb{Z}$.

6. Aritmetinė progresija:

$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$ – n-tasis narys, $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1+d\cdot(n-1)}{2} \cdot n$ – pirmųjų n narių suma;

čia a_1 – pirmasis narys, d – skirtumas, n – nario eilės numeris.

7. Geometrinė progresija:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ – n-tasis narys, $S_n = \frac{b_1 - q \cdot b_n}{1-q} = \frac{b_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}$ – pirmųjų n narių suma;

čia b_1 – pirmasis narys, q – vardiklis, n – nario eilės numeris.

8. Sudėtiniai procentai:

$S_n = S_0 \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n$;

čia S_0 – dydžio S pradinė reikšmė, p – procentų skaičius, n – kartų skaičius.

9. Atkarpa:

$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ – atkarpos ilgis, $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ – atkarpos vidurio taško koordinatės;

čia $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ – atkarpos galų koordinatės, M – atkarpos vidurio taškas.

10. Trikampis:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\angle A)$ – kosinusų teorema,

$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} = 2 \cdot R$ – sinusų teorema ir jos išvada,

$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\angle C) = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = r \cdot p = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$ – trikampio plotas;

čia a, b ir c – trikampio kraštinių ilgiai, $\angle A$, $\angle B$ ir $\angle C$ – prieš jas esančių atitinkamų trikampio kampų didumai, p – trikampio pusperimetris, h_a – ilgis trikampio aukštinės, einančios į kraštinę, kurios ilgis yra a, r – į trikampį įbrėžto apskritimo spindulio ilgis, R – apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgis.

11. Skritulio išpjova:

$S_\alpha = \frac{\pi \cdot R^2}{360} \cdot \alpha$ – plotas, $C_\alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{360} \cdot \alpha$ – lanko ilgis;

čia R – spindulio ilgis, α – kampo didumas (laipsnių skaičiumi).

12. Ritinys:

$S = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H$ – šoninio paviršiaus plotas, $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$ – tūris;

čia R – pagrindo spindulio ilgis, H – aukštinės ilgis.

13. Kūgis:

$S = \pi \cdot R \cdot l$ – šoninio paviršiaus plotas, $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$ – tūris;

čia R – pagrindo spindulio ilgis, l – sudaromosios ilgis, H – aukštinės ilgis.

14. Rutulys:

$S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$ – paviršiaus plotas, $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ – tūris;

čia R – spindulio ilgis.

15. Piramidės tūris:

$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H$;

čia S – pagrindo plotas, H – aukštinės ilgis.

16. Išvestinės:

$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c \in \mathbb{R}$; $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ – išvestinių skaičiavimo taisyklės;

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$;

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ – funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės, nubrėžtos per grafiko tašką $(x_0; f(x_0))$, lygtis, $f'(x_0)$ – liestinės krypties koeficientas.